Θεωρία Μέτρου (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 19 Δεκεμβρίου 2021)

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to [0, \infty]$ γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leqslant a_n < \infty$ και $A_n \in \mathcal{A}$.

2. (α) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

4. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{1}{\lambda(A)} \int_A f \, d\lambda \right| \leqslant M$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq E$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι $|f(x)| \leqslant M$ σχεδόν παντού στο E.

5. (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(G) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : 0 \leqslant f \leqslant \chi_G, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τις $f_n(x) = \left(\frac{d(x,G^c)}{1+d(x,G^c)} \right)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.]

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(F) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : f \geqslant \chi_F, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε, πάλι, κατάλληλες f_n.]

6. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$, και $f : A \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $G : (0, \infty) \to [0, \infty)$ με

$$G(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}).$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f \, d\lambda$.

(β) Έστω B μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) < \infty$, και $g : B \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n := \{x \in B : |g(x)| \geqslant n\}$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$.

7. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε το πρώτα για απλές ολοκληρώσιμες f.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $m(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω f_n, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

10. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, τα όρια

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, d\lambda(x)$$

και

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{(1 + x/n)^n x^{1/n}} \, d\lambda(x).$$

11*. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{a_1}{x - c_1} + \frac{a_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - c_n},$$

όπου $a_1, \ldots, a_n > 0$ και $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \lambda(\{x : f(x) < -t\}) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{t}.$$