Θεωρία Μέτρου (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 16 Ιανουαρίου 2022)

1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x,y) = \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{y<x<y+2\pi}(x,y)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Εξηγήστε γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini.

2. Έστω A Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 1$. Υπολογίστε το

$$\lambda_2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1+x^2)(y - e^x) \in A\}).$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και $t > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u)\, du$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $g : Y \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $h : X \times Y \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(x)g(y)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη και ότι αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu), g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ τότε $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ και

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \int_X f\, d\mu \cdot \int_Y g\, d\nu.$$

5. Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x)\, d\mu(x).$$

6. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E + x) = \mu(E)$ και $\nu(E + x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t(x) = tf(tx)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to 1} \int_{\mathbb{R}} |f - f_t|\, d\lambda = 0.$$

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν:

(α) $\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και

(β) για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \to 0$.

9. Δίνονται Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|g_n(x)| \leqslant C$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in [0,1]$.

(β) Για κάθε $\alpha \in [0,1]$ ισχύει

$$\int_0^\alpha g_n(x)\,dx \to 0.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^1 f(x) g_n(x)\,dx \to 0.$$

10. Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\alpha_n \to 0$. Δώστε παράδειγμα φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x - \alpha_n)$ να μην συγκλίνει σχεδόν παντού στην f.

[*Υπόδειξη:* Μια ιδέα είναι να θεωρήσετε τη δείκτρια συνάρτηση κατάλληλου συνόλου τύπου Cantor.]