511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

(Ημερομηνία Παράδοσης: 1 Δεκεμβρίου 2005)

1. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\cap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\lambda(A)=0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

2. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. Δείξτε ότι το σύνολο $B=\{x^2:x\in A\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, και $\lambda(B)=0$.

3. Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο C του Cantor είναι τέλειο και πουθενά πυκνό (δηλαδή, είναι κλειστό, δεν έχει μεμονωμένα σημεία, δεν περιέχει διάστημα).

4. Έστω $C=\cap_{n=0}^{\infty}I^{(n)}$ το τριαδικό σύνολο του Cantor. Δείξτε ότι $\frac{1}{4}\in C$ αλλά, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$.

5. (α) Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία c_n στο $\{0,1,2\}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό στο $[0,1]$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ υπάρχει ακολουθία c_n στο $\{0,1,2\}$ ώστε $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$. Λέμε ότι το $0.c_1c_2\cdots$ είναι ένα *τριαδικό ανάπτυγμα* του x.

(γ) Δείξτε ότι αν $x\in[0,1]$ τότε ο x έχει δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα αν και μόνο αν $x=\frac{m}{3^n}$ για κάποιους $m,n\in\mathbb{N}$.

(δ) Δείξτε ότι αν $x\in[0,1]$ τότε $x\in C$ αν και μόνο αν ο x έχει τουλάχιστον ένα τριαδικό ανάπτυγμα $0.c_1c_2\cdots$ με $c_n\in\{0,2\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

6. Έστω $0<\delta<1$. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του $[0,1]$ με τον ίδιο τρόπο όπως το σύνολο του Cantor, με τη διαφορά ότι στο n–οστό βήμα τα διαστήματα που αφαιρούνται έχουν μήκος $\frac{\delta}{3^n}$. Δείξτε ότι το σύνολο D_δ που προκύπτει είναι τέλειο, δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_\delta)=1-\delta$.

7*. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,

$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$