511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

(Ημερομηνία Παράδοσης: 8 Δεκεμβρίου 2005)

1. Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}((q,+\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

2. Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η g είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

3. Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

4. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

5. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

6. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin N$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin N$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1(γ) του Φυλλαδίου 3 (Λήμμα Borel–Cantelli).

7. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin N$.

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$.

8. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Γράψτε την f σαν όριο ακολουθίας Borel μετρήσιμων συναρτήσεων.