Κεφάλαιο 1

σ–άλγεβρες

1.1 σ–άλγεβρες

Ορισμός 1.1.1 (σ-άλγεβρα)**.** Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **σ–άλγεβρα στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις. Το ζευγάρι $(X, \mathcal{A})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος**.

Πρόταση 1.1.2. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X. Τότε, η $\mathcal{A}$ περιέχει το $\emptyset$ και το X, και είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις, πεπερασμένες και άπειρες αριθμήσιμες τομές, συνολοθεωρητικές διαφορές.

Παραδείγματα 1.1.3. Αν $X \neq \emptyset$ τότε οι $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, E, E^c, X\}$ όπου E μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(X)$ (το δυναμοσύνολο του X), είναι σ–άλγεβρες στο X.

Αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε η

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο X.

Πρόταση 1.1.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε: $B_n \subseteq A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_1 \cup \cdots \cup A_N = B_1 \cup \cdots \cup B_N$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Το ίδιο ισχύει για πεπερασμένες ακολουθίες $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$.

1.2 Παραγόμενες σ–άλγεβρες

Πρόταση 1.2.1. Αν $(\mathcal{A})_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια σ–αλγεβρών στο X τότε η $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ είναι σ–άλγεβρα στο X.

Ορισμός 1.2.2 (παραγόμενη σ–άλγεβρα)**.** Αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X τότε η

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{–άλγεβρα και } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}\}$$

είναι (καλά ορισμένη) σ–άλγεβρα στο X. Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η **σ–άλγεβρα που παράγεται από την** $\mathcal{F}$.

Πρόταση 1.2.3. Αν $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τότε η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη σ–άλγεβρα στο X η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Παραδείγματα 1.2.4. (α) Αν E είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X και $\mathcal{F} = \{E\}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, E, E^c, X\}$.

(β) Αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο}\}$, τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$.

1.3 Borel σ–άλγεβρες

Ορισμός 1.3.1 (Borel σ–άλγεβρα)**.** Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X. Η σ–άλγεβρα

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$$

είναι η **Borel σ–άλγεβρα του** X. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}(X)$ είναι τα **Borel σύνολα** του X.

Τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του X είναι Borel σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα G_δ σύνολα) και τις αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα F_σ σύνολα).

Πρόταση 1.3.2. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε,

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(X).$$

Παράδειγμα 1.3.3 (Ευκλείδειος χώρος)**.** Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ με την Ευκλείδεια μετρική. **Διάστημα** λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j) \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j) \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$$

όπου $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ (στην πρώτη περίπτωση, $a_j \leq b_j$). Τα παραπάνω διαστήματα ονομάζονται κλειστά, ανοικτά, κλειστά–ανοικτά και ανοικτά–κλειστά αντίστοιχα. Κάθε διάστημα είναι Borel σύνολο ως πεπερασμένη τομή ανοικτών ή/και κλειστών ημιχώρων.

Πρόταση 1.3.4. Έστω $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ οι οικογένειες των κλειστών, ανοικτών, κλειστών–ανοικτών και ανοικτών–κλειστών διαστημάτων αντίστοιχα. Για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ ισχύει

$$\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{B}(X).$$

1.4 Άλγεβρες και μονότονες κλάσεις

Ορισμός 1.4.1 (άλγεβρα)**.** Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **άλγεβρα στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Πρόταση 1.4.2. Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Τότε, η $\mathcal{A}$ περιέχει το $\emptyset$ και το X, και είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και συνολοθεωρητικές διαφορές.

Παρατηρήσεις 1.4.3. (α) Κάθε σ–άλγεβρα είναι άλγεβρα.
(β) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν $X = \mathbb{N}$ και αν

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, A \text{ πεπερασμένο ή } A^c \text{ πεπερασμένο}\},$$

τότε η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα αλλά δεν είναι σ–άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.4.4 (Ευκλείδειος χώρος)**.** Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ με την Ευκλείδεια μετρική. **Γενικευμένο διάστημα** λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$P = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j], \ \textit{όπου} \ -\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty.$$

Πρόταση 1.4.5. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{P_1 \cup \cdots \cup P_k \,|\, k \in \mathbb{N},\, P_1, \ldots, P_k \text{ ξένα γενικευμένα διαστήματα}\}$$

είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η τομή δύο γενικευμένων διαστημάτων είναι κενή ή γενικευμένο διάστημα.

(ii) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

(iii) Το συμπλήρωμα γενικευμένου διαστήματος ανήκει στην $\mathcal{A}$.

(iv) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

(v) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Ορισμός 1.4.6 (μονότονη κλάση)**.** Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **μονότονη κλάση στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις και κλειστή ως προς φθίνουσες αριθμήσιμες τομές.

Παρατηρήσεις 1.4.7. (α) Κάθε σ–άλγεβρα είναι μονότονη κλάση (το αντίστροφο δεν ισχύει).
(β) Αν μια άλγεβρα είναι και μονότονη κλάση, τότε είναι σ–άλγεβρα.

Πρόταση 1.4.8. Αν $(\mathcal{A})_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια μονότονων κλάσεων στο X τότε η $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ είναι μονότονη κλάση στο X.

Ορισμός 1.4.9 (παραγόμενη μονότονη κλάση)**.** Αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X τότε η

$$m(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} \,|\, \mathcal{A} \text{ μονότονη κλάση και } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}\}$$

είναι (καλά ορισμένη) μονότονη κλάση στο X. Η $m(\mathcal{F})$ είναι η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{F}$.

Πρόταση 1.4.10. Αν $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τότε η $m(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη μονότονη κλάση στο X η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $\mathcal{A}$ είναι μονότονη κλάση και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τότε $m(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Πρόταση 1.4.11. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

1.5 Περιορισμός σ–άλγεβρας

Πρόταση 1.5.1. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και έστω Y ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} \restriction Y = \{A \cap Y \,|\, A \in \mathcal{A}\}.$$

Τότε, η $\mathcal{A} \restriction Y$ είναι σ–άλγεβρα στο Y.

Ορισμός 1.5.2 (περιορισμός σ–άλγεβρας)**.** Η $\mathcal{A} \restriction Y$ λέγεται **περιορισμός** της $\mathcal{A}$ στο Y. Γενικότερα, αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X και αν Y είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, τότε η οικογένεια $\mathcal{F} \restriction Y = \{A \cap Y \,|\, A \in \mathcal{F}\}$ λέγεται περιορισμός της $\mathcal{F}$ στο Y.

Πρόταση 1.5.3. Έστω $\mathcal{F}$ μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X και έστω Y ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε,

$$\sigma(\mathcal{F} \restriction Y) = \sigma(\mathcal{F}) \restriction Y.$$

Πρόταση 1.5.4. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ως συνήθως, αν Y είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, θεωρούμε το Y σαν υπόχωρο του X με τη μετρική $\rho|_{Y\times Y}$. Τότε,

$$\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \restriction Y.$$