Κεφάλαιο 2

Μέτρα

2.1 Μέτρα

Ορισμός 2.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται **μέτρο** στον $(X, \mathcal{A})$ αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\mu(\emptyset) = 0$.

(β) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου**.

Πρόταση 2.1.2. Κάθε μέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό: αν $A_1, \ldots, A_N$ είναι ξένα στοιχεία της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Παραδείγματα 2.1.3. (α) Το μηδενικό μέτρο: $\mu(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

(β) Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Θέτουμε $\mu(A) = 0$ αν το A είναι αριθμήσιμο και $\mu(A) = 1$ αν το A^c είναι αριθμήσιμο. Το μ είναι μέτρο.

Θεώρημα 2.1.4 (βασικές ιδιότητες). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Μονοτονία: Αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(γ) Υποπροσθετικότητα: Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(δ) Συνέχεια: Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ε) Συνέχεια: Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mu(A_1) < \infty$, τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ορισμός 2.1.5 (κατηγορίες μέτρων). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται:

(α) **πεπερασμένο**, αν $\mu(X) < \infty$.

(β) **μέτρο πιθανότητας**, αν $\mu(X) = 1$.

(γ) σ–**πεπερασμένο**, αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(δ) **ημιπεπερασμένο**, αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ μπορούμε να βρούμε $E \subset A$ στην $\mathcal{A}$ με $0 < \mu(E) < \infty$.

Παρατήρηση 2.1.6. Έστω μ ένα σ–πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

(β) Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Πρόταση 2.1.7. Κάθε σ–πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο.

Ορισμός 2.1.8 (σύνολα μέτρου 0). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $E \in \mathcal{A}$ είναι **μέτρου** 0 αν $\mu(E) = 0$.

Πρόταση 2.1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Αν $\mu(E) = 0$, $F \in \mathcal{A}$ και $F \subseteq E$, τότε $\mu(F) = 0$.

(β) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ και $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$.

2.2 Σημειακές κατανομές

Ορισμός 2.2.1. Έστω $I \neq \emptyset$ και $\alpha : I \to [0, \infty]$. Γράφουμε α_i αντί για $\alpha(i)$. Ορίζουμε

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} \alpha_i \,|\, F \subseteq I,\, F \neq \emptyset, F \text{ πεπερασμένο}\right\}.$$

Επίσης, συμφωνούμε ότι $\sum_{i\in\emptyset} \alpha_i = 0$.

Παρατήρηση 2.2.2. Αν $\sum_{i\in I} \alpha_i < \infty$ τότε το σύνολο $J = \{i \in I : \alpha_i > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\alpha : X \to [0, \infty]$. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \alpha_x$$

για κάθε $A \subseteq X$. Τότε, το μ είναι μέτρο (η **σημειακή κατανομή που επάγεται από την** α). Ο α_x είναι η **μάζα** στο σημείο x.

Παραδείγματα 2.2.4. (α) Αν $\alpha_x = 1$ για κάθε $x \in X$ τότε το $\mu(A)$ ισούται με τον πληθάριθμο του A (το μ λέγεται **μέτρο απαρίθμησης**).

(β) Έστω $X \neq \emptyset$. Σταθεροποιούμε $x_0 \in X$ και ορίζουμε $\alpha_x = 1$ αν $x = x_0$ και $\alpha_x = 0$ αν $x \neq x_0$. Τότε, η σημειακή κατανομή δ_{x_0} που επάγεται από την α είναι η εξής: αν $A \subseteq X$ και $x_0 \in A$ τότε $\delta_{x_0}(A) = 1$, ενώ αν $A \subseteq X$ και $x_0 \notin A$ τότε $\delta_{x_0}(A) = 0$. Το δ_{x_0} είναι το **μέτρο Dirac** στο x_0.

2.3 Πλήρη μέτρα

Ορισμός 2.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι **πλήρες** αν ικανοποιεί το εξής: αν $\mu(E) = 0$ και $F \subseteq E$ τότε $F \in \mathcal{A}$ (οπότε, $\mu(F) = 0$). Αν το μ είναι πλήρες, ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **πλήρης χώρος μέτρου**.

Ορισμός 2.3.2. Αν $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι δύο χώροι μέτρου στο ίδιο σύνολο X, ο $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ λέγεται **επέκταση** του $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ αν ισχύουν τα εξής:

(α) $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{A}_1$ ισχύει $\mu_2(A) = \mu_1(A)$.

Θεώρημα 2.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υπάρχει μοναδικός χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ που ικανοποιεί τα εξής:

(α) Ο $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ είναι επέκταση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(β) Ο $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου.

(γ) Αν $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι πλήρης επέκταση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$, τότε ο $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι επέκταση του $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$.

Ορισμός 2.3.4. Η πλήρης επέκταση $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ του προηγούμενου Θεωρήματος λέγεται **πλήρωση** του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Παράδειγμα 2.3.5 (μη πλήρες μέτρο). Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in X$. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα που περιέχει το $\{x_0\}$ και περιέχεται γνήσια στο $\mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\mu(A) = 1$ αν $x_0 \in A$ και $\mu(A) = 0$ αν $x_0 \notin A$. Το μ δεν είναι πλήρες.

Παράδειγμα τέτοιας σ–άλγεβρας: θεωρήστε τυχόν σύνολο με περισσότερα από δύο στοιχεία και την $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$, όπου $\mathcal{F} = \{\{x_0\}\}$.

2.4 Περιορισμός

Πρόταση 2.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $\emptyset \neq Y \subseteq X$, ορίζουμε $\mu_Y : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_Y(A) = \mu(A \cap Y) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Τότε, το μ_Y είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Επίσης, $\mu_Y(A) = \mu(A)$ αν $A \subseteq Y$ και $\mu_Y(A) = 0$ αν $A \cap Y = \emptyset$.

Ορισμός 2.4.2 (περιορισμός στο Y). Το μέτρο μ_Y λέγεται **περιορισμός του μ στο Y.**

Λήμμα 2.4.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Τότε,

$$\mathcal{A} \restriction Y = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A \subseteq Y\}.$$

Πρόταση 2.4.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $\emptyset \neq Y \subseteq X$, ορίζουμε $\mu \restriction Y : \mathcal{A} \restriction Y \to [0, \infty]$ με

$$(\mu \restriction Y)(A) = \mu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \restriction Y.$$

Τότε, το $\mu \restriction Y$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A} \restriction Y)$.

Ορισμός 2.4.5 (περιορισμός στην $\mathcal{A} \restriction Y$). Το μέτρο $\mu \restriction Y$ λέγεται **περιορισμός του μ στην $\mathcal{A} \restriction Y$.**

2.5 Μοναδικότητα

Θεώρημα 2.5.1. Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του μη κενού συνόλου X και έστω μ, ν δύο μέτρα στην $\sigma(\mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\mu(A) = \nu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Τότε, τα μ και ν συμπίπτουν: $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{A})$.