Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

3.1 Εξωτερικά μέτρα

Ορισμός 3.1.1 (εξωτερικό μέτρο). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ λέγεται **εξωτερικό μέτρο στο** X αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(β) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(γ) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X τότε

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ορισμός 3.1.2 (σ–κάλυψη). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του X λέγεται σ**–κάλυψη** για το X αν υπάρχουν $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ στην $\mathcal{C}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Θεώρημα 3.1.3 (κατασκευή εξωτερικών μέτρων). Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–κάλυψη για το μη κενό σύνολο X, και έστω $\tau : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ τυχούσα απεικόνιση με $\tau(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \,|\, C_j \in \mathcal{C},\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}.$$

Τότε, η απεικόνιση μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

3.2 Ο ορισμός του Καραθεοδωρή

Ορισμός 3.2.1 (μ^*–μετρήσιμο σύνολο). Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι μ^***–μετρήσιμο** αν

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$$

για κάθε $E \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{\mu^*}$ την οικογένεια όλων των μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Θεώρημα 3.2.2 (θεώρημα του Καραθεοδωρή). Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X είναι σ–άλγεβρα. Αν συμβολίσουμε με μ τον περιορισμό της απεικόνισης μ^* στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$, τότε η τριάδα $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ είναι ένας πλήρης χώρος μέτρου.

Απόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iv) Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι άλγεβρα.

(v) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) = \mu^*\left(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\right)$$

για κάθε $E \subseteq X$.

(vi) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(vii) Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι σ–άλγεβρα.

(viii) Το $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ είναι μέτρο.

(ix) Το μ είναι πλήρες μέτρο.

Παρατήρηση 3.2.3. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε,

(α) Αν $B \subseteq X$ και $\mu^*(B) = 0$ τότε το B είναι μ^*–μετρήσιμο.

(β) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) = \mu^*\left(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\right)$$

για κάθε $E \subseteq X$.