# Κεφάλαιο 4

# Μέτρο Lebesgue στον Ευκλείδειο χώρο

## 4.1 Μέτρο Lebesgue

**Ορισμός 4.1.1.** Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ την οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $R = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j)$, $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{C}$ είναι $\sigma$–κάλυψη του $\mathbb{R}^k$. Για κάθε ανοικτό διάστημα $R$ ορίζουμε

$$\tau(R) = \mathrm{vol}_k(R) = \prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j).$$

Η $\mathcal{C}$ και η $\tau$ επάγουν ένα εξωτερικό μέτρο $\lambda_k^*$ στον $\mathbb{R}^k$. Αν $\mathcal{L}_k$ είναι η $\sigma$–άλγεβρα των $\lambda_k^*$–μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ τότε το $\lambda_k = \lambda_k^*|_{\mathcal{L}_k}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\mathcal{L}_k$.

Το $\lambda_k^*$ είναι το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}^k$. Το $\lambda_k$ είναι το **μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{L}_k$ είναι η $\sigma$–άλγεβρα των **Lebesgue μετρήσιμων** υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$.

**Θεώρημα 4.1.2.** Κάθε διάστημα $S$ στον $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, και

$$\lambda_k(S) = \mathrm{vol}_k(S).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 απαιτούνται τα εξής βοηθητικά λήμματα:

(i) Έστω $P = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j]$. Για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θεωρούμε μια διαμέριση $a_j = c_j^0 < c_j^1 < \cdots < c_j^{m_j} = b_j$ του $[a_j, b_j]$ και, για κάθε $1 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq m_k$ ορίζουμε $P_{i_1,\ldots,i_k} = \prod_{j=1}^{k}(c_j^{i_j-1}, c_j^{i_j}]$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) = \sum_{1\leq i_1\leq m_1,\ldots,1\leq i_k\leq m_k} \mathrm{vol}_k(P_{i_1,\ldots,i_k}).$$

(ii) Έστω $P, P_1, \ldots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_s$ είναι ξένα και ότι $P = P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) = \mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s).$$

(iii) Έστω $P, P_1, \ldots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι τα $P_1, \ldots, P_s$ είναι ξένα και ότι $P_1 \cup \cdots \cup P_s \subseteq P$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s) \leq \mathrm{vol}_k(P).$$

(iv) Έστω $P, P_1, \ldots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι $P \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) \leq \mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s).$$

(v) Έστω $Q$ ένα κλειστό διάστημα και έστω $R_1, \ldots, R_s$ ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Αν $Q \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_s$, τότε

$$\mathrm{vol}_k(Q) \leq \mathrm{vol}_k(R_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(R_s).$$

(vi) Για κάθε διάστημα $S$ στον $\mathbb{R}^k$ ισχύει

$$\lambda_k^*(S) = \mathrm{vol}_k(S).$$

(vii) Κάθε διάστημα είναι Lebesgue μετρήσιμο.

**Πρόταση 4.1.3.** Το μέτρο Lebesgue $\lambda_k$ είναι $\sigma$–πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο.

**Πρόταση 4.1.4.** Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

### 4.1α′ Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

**Πρόταση 4.1.5.** Έστω $E \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό ώστε $E \subseteq A$ και $\lambda_k(A \setminus E) < \varepsilon$.

**Θεώρημα 4.1.6.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Το $E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $G_\delta$–σύνολο $A$ ώστε $E \subseteq A$ και $\lambda_k^*(A \setminus E) = 0$.

**Θεώρημα 4.1.7.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Το $E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $F_\sigma$–σύνολο $B$ ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda_k^*(E \setminus B) = 0$.

**Θεώρημα 4.1.8.** Έστω $\mu$ ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ ώστε $\mu(P) = \mathrm{vol}_k(P)$ για κάθε ανοικτό–κλειστό διάστημα $P$ στον $\mathbb{R}^k$. Τότε,

$$\mu(E) = \lambda_k(E)$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

**Θεώρημα 4.1.9.** Ο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}_k, \lambda_k)$ είναι η πλήρωση του $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda_k)$.

**Πρόταση 4.1.10.** Έστω $E \in \mathcal{L}_k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανοικτά διαστήματα $R_1, \ldots, R_s$ ώστε

$$\lambda_k(E \bigtriangleup (R_1 \cup \cdots \cup R_s)) < \varepsilon.$$

### 4.1β′ Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

**Ορισμός 4.1.11 (κανονικό μέτρο).** Έστω $(X,\rho)$ ένας μετρικός χώρος, $\mathcal{A}$ μια $\sigma$–άλγεβρα που περιέχει την Borel $\sigma$–άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ του $X$, και έστω $\mu$ ένα μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$. Το $\mu$ λέγεται **κανονικό** αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$.

(ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq U\}$ για κάθε $U$ ανοικτό στον $X$.

Η ιδιότητα (ii) λέγεται *εξωτερική κανονικότητα* του $\mu$ και η ιδιότητα (iii) λέγεται *εσωτερική κανονικότητα* του $\mu$.

**Πρόταση 4.1.12 (κανονικότητα του μέτρου Lebesgue).** Το μέτρο Lebesgue $\lambda_k$ είναι κανονικό μέτρο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$. Επιπλέον, ισχύει

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq A\}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A$.

### 4.1γ′ Μέτρο Lebesgue και απλοί μετασχηματισμοί

**Πρόταση 4.1.13.** Έστω $A \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $x + A \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(x + A) = \lambda_k(A).$$

**Πρόταση 4.1.14.** Έστω $A \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $\rho > 0$ ισχύει $\rho A \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(\rho A) = \rho^k \lambda_k(A).$$

**Πρόταση 4.1.15.** Έστω $A \in \mathcal{L}_k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Τότε, $T(A) \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_k(A).$$

## 4.2 Μη μετρήσιμα σύνολα

**Πρόταση 4.2.1 (το λήμμα του Steinhaus).** Έστω $A \in \mathcal{L}_k$ με $\lambda_k(A) > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο

$$A - A = \{x - y : x, y \in A\}$$

να περιέχει την ανοικτή μπάλα $B(0,\delta)$.

**Πρόταση 4.2.2 (Vitali).** Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

*Ορισμός του $E$:* Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Το $E$ ορίζεται, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, να περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$.

**Πρόταση 4.2.3.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Υπάρχει $F \subseteq A$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

## 4.3 Μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

### 4.3α′ Το τριαδικό σύνολο του Cantor

*Κατασκευή.* Θεωρούμε το διάστημα $I^0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Ονομάζουμε $I^1$ το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$I^1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right].$$

Το $I^1$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{3},1\right]$ σε τρία ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^2$ το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$I^2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1,2,\dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^n$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^n)$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^n \supset I^{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$.

(ii) Το $I^n$ είναι η ένωση $2^n$ κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n.$$

Τα διαστήματα της μορφής $\left[\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0,1,\dots,3^n-1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

**Πρόταση 4.3.1 (σύνολο του Cantor).** Το $C$ είναι κλειστό, υπεραριθμήσιμο και έχει μέτρο Lebesgue $\lambda(C) = 0$.

### 4.3β′ Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

*Κατασκευή.* Θεωρούμε τα σύνολα $I^n$ που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του $C$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \dots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1]\backslash I^n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε $x$ στο $J_k^n$, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^n$ ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

**Πρόταση 4.3.2 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue).** Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η $f$ είναι αύξουσα και επί. Η εικόνα του $C$ μέσω της $f$ έχει μέτρο $\lambda(f(C)) = 1$.

**Πρόταση 4.3.3.** Υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν είναι Borel.

*Κατασκευή.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου $f$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η $g$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η $g^{-1}$).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Έστω $M$ ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του $C$ το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το $K$ δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το $M$ θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο.