Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρησιμότητα

Ορισμός 5.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}_1)$ και $(Y, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν για κάθε $E \in \mathcal{A}_2$ ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$.

Πρόταση 5.1.2. Αν $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ τότε η $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $E \in \mathcal{E}$ ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$.

Πρόταση 5.1.3. Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$–μετρήσιμη.

5.1α΄ Περιορισμός και συγκόλληση

Ορισμός 5.1.4. Έστω $f : X \to Y$. Για κάθε $E \subseteq X$ συμβολίζουμε με f_E τον περιορισμό της f στο E. Δηλαδή, $f_E : E \to Y$ και $f_E(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$.

Έστω $\mathcal{A}_1$ μια σ–άλγεβρα υποσυνόλων του X. Θυμηθείτε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} \restriction E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$ είναι σ–άλγεβρα στο E. Ειδικότερα, αν $E \in \mathcal{A}$ τότε

$$\mathcal{A} \restriction E = \{A \mid A \subseteq E,\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Πρόταση 5.1.5. Έστω $(X, \mathcal{A}_1)$, $(Y, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, και έστω $f : X \to Y$. Υποθέτουμε ότι τα $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_1$ είναι ξένα και $X = E_1 \cup \cdots \cup E_n$.

Τότε, η f είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $j = 1, \ldots, n$ η f_{E_j} είναι $(\mathcal{A}_1 \restriction E_j, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη.

Το ίδιο ισχύει αν αντί για την πεπερασμένη διαμέριση $\{E_1, \ldots, E_n\}$ του X θεωρήσουμε άπειρη αριθμήσιμη διαμέριση $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ του X.

5.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις με πραγματικές τιμές

Ορισμός 5.2.1. (α) Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ λέγεται $\mathcal{A}$–μετρήσιμη (ή, πιο απλά, μετρήσιμη) αν είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–μετρήσιμη.

(β) Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται $\mathcal{A}$–μετρήσιμη (ή, πιο απλά, μετρήσιμη) αν είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$–μετρήσιμη.

Σημείωση. Η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι η

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{+\infty, -\infty\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τον γενικό ορισμό μιας Borel σ–άλγεβρας, αν θεωρήσουμε το $\overline{\mathbb{R}}$ σαν τοπολογικό χώρο με βασικές περιοχές του $+\infty$ και του $-\infty$ τα σύνολα της μορφής $(a, +\infty]$ και $[-\infty, a)$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) αντίστοιχα.

Ορισμός 5.2.2. (α) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **Borel μετρήσιμη** αν είναι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$–μετρήσιμη.

(β) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη** αν είναι $\mathcal{L}_k$–μετρήσιμη.

5.2α′ Χαρακτηρισμοί μετρησιμότητας

Πρόταση 5.2.3. Έστω $f = (f_1, \ldots, f_k) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^k$. Η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$–μετρήσιμη αν και μόνο αν κάθε f_j είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.4. Η $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Σημείωση. Στην προηγούμενη Πρόταση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οικογένεια $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ με οποιαδήποτε από τις $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ ή $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Πρόταση 5.2.5. Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι μετρήσιμη.

(β) Τα σύνολα $f^{-1}(\{+\infty\})$ και $E = f^{-1}(\mathbb{R})$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$, και η f_E είναι $(\mathcal{A} \restriction E)$–μετρήσιμη.

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$.

5.2β′ Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Πρόταση 5.2.6. Έστω $(X, \mathcal{A}_1)$, $(Y, \mathcal{A}_2)$ και $(Z, \mathcal{A}_3)$ τρεις μετρήσιμοι χώροι. Αν η $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη και η $g : Y \to Z$ είναι $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$–μετρήσιμη, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3)$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.7. Έστω f και $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, οι $f + g$ και $f \cdot g$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.8. Έστω f και $g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, το σύνολο

$$E = \{x : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και η $(f + g) \restriction E^c$ είναι $(\mathcal{A} \restriction E^c)$–μετρήσιμη.

Σύμβαση. $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

Πρόταση 5.2.9. Έστω f και $g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f \cdot g$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.10. Έστω f και $g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, τα σύνολα $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ και $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

Πρόταση 5.2.11. Έστω $f_1, \dots, f_n : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, οι συναρτήσεις $\max\{f_1, \dots f_n\}$ και $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.12. Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.13. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, οι συναρτήσεις $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ και $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.14. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{το } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει στο } \overline{\mathbb{R}}\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και η συνάρτηση $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.

5.3 Απλές συναρτήσεις

Ορισμός 5.3.1. Έστω $E \subseteq X$. Η συνάρτηση $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in E \\ 0 & \text{αν } x \notin E \end{cases}$, λέγεται **χαρακτηριστική συνάρτηση** του E.

Παρατήρηση 5.3.2. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$t\chi_E + s\chi_F = t\chi_{E\setminus F} + (t+s)\chi_{E\cap F} + s\chi_{F\setminus E}, \quad \chi_E\chi_F = \chi_{E\cap F}, \quad \chi_{E^c} = 1 - \chi_E$$

για κάθε $E, F \subseteq X$ και για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 5.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $E \subseteq X$. Τότε, η χ_E είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 5.3.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 5.3.5. (α) Μια συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή αν και μόνο αν είναι γραμμικός συνδυασμός (πεπερασμένων το πλήθος) χαρακτηριστικών συναρτήσεων υποσυνόλων του X.

(β) Αν η $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή, τότε υπάρχει διαμέριση $\{E_1, \dots, E_m\}$ του X σε ξένα, μη κενά σύνολα E_i, και υπάρχουν $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, διαφορετικοί ανά δύο, ώστε

$$\phi = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_m\chi_{E_m}.$$

Υπάρχει μία μόνο αναπαράσταση της ϕ με τις παραπάνω ιδιότητες. Αυτή η αναπαράσταση λέγεται **κανονική μορφή** της ϕ.

(γ) Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και αν $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή την $\phi = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_m\chi_{E_m}$, τότε η ϕ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 5.3.6. (α) Κάθε γραμμικός συνδυασμός των απλών συναρτήσεων $\phi_1, \ldots, \phi_s : X \to \mathbb{R}$ (με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς) είναι απλή συνάρτηση.

(β) Αν $\phi, \psi : X \to \mathbb{R}$ είναι δύο απλές συναρτήσεις, τότε οι $\phi \cdot \psi$, $\max\{\phi, \psi\}$ και $\min\{\phi, \psi\}$ είναι απλές συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.3.7 (προσέγγιση συνάρτησης από απλές συναρτήσεις). Έστω $f : X \to [0, +\infty]$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f: για κάθε $x \in X$ ισχύει $\phi_n(x) \to f(x)$.

Επιπλέον, αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο $E \subseteq X$, τότε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.

Ορισμός της ϕ_n: Ορίζουμε $G = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $(0, n]$ σε $n \cdot 2^n$ διαδοχικά ανοικτά–κλειστά διαστήματα μήκους $1/2^n$ και θέτουμε

$$E_n^k = \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n$$

και

$$F_n = \{x \in X : f(x) > n\}.$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\phi_n = n \cdot \chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_n^k}.$$

Θεώρημα 5.3.8 (προσέγγιση μετρήσιμης συνάρτησης από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις). Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f: για κάθε $x \in X$ ισχύει $\phi_n(x) \to f(x)$.

Επιπλέον, αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο $E \subseteq X$, τότε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε οι ϕ_n που ορίστηκαν παραπάνω είναι μετρήσιμες.