Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

6.1 Απλές μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική μορφή την

$$\phi = a_1 \chi_{E_1} + \cdots + a_m \chi_{E_m}.$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της ϕ θέτοντας

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i).$$

Παρατήρηση 6.1.2. (α) Με τον παραπάνω ορισμό, έχουμε $\int_X \phi \, d\mu < \infty$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : \phi(x) > 0\}) < \infty$.
(β) Έχουμε $\int_X \phi \, d\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : \phi(x) > 0\}) = 0$.

Λήμμα 6.1.3. Έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\phi = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{F_j}$ για κάποια ξένα $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(F_j).$$

Λήμμα 6.1.4. Έστω $\phi, \psi : X \to [0, \infty)$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $t \geq 0$. Τότε,

$$\int_X (\phi + \psi) \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu \quad \textit{και} \quad \int_X (t\phi) \, d\mu = t \int_X \phi \, d\mu.$$

Λήμμα 6.1.5. Έστω $\phi, \psi : X \to [0, \infty)$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\phi \leq \psi$ στο X, τότε

$$\int_X \phi \, d\mu \leq \int_X \psi \, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.6. Έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\{A_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $A_n \uparrow X$, τότε

$$\int_X \phi \chi_{A_n} \, d\mu \nearrow \int_X \phi \, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.7. Έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\{\phi_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $\phi_n : X \to [0, \infty)$.

(α) Αν $\lim_{n\to\infty} \phi_n \le \phi$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \, d\mu \le \int_X \phi \, d\mu.$$

(β) Αν $\phi \le \lim_{n\to\infty} \phi_n$, τότε

$$\int_X \phi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.8. Έστω $\{\phi_n\}$ και $\{\psi_n\}$ δύο αύξουσες ακολουθίες απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $\phi_n, \psi_n : X \to [0, \infty)$. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n \, d\mu.$$

6.2 Μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n \, d\mu,$$

όπου $\{\phi_n\}$ αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f. Τέτοιες ακολουθίες $\{\phi_n\}$ υπάρχουν από το Θεώρημα 5.3.8. Επίσης, το όριο στο δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της αύξουσας ακολουθίας $\{\phi_n\}$. Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 6.1.8. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της f είναι καλά ορισμένο.

Παρατηρήσεις 6.2.2. (α) Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi \, d\mu : \ 0 \le \phi \le f, \ \phi \text{ απλή μετρήσιμη} \right\}.$$

(β) Αν η f είναι απλή, τότε ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος της f συμφωνεί με τον παλιό: αυτό φαίνεται αμέσως αν θεωρήσουμε την σταθερή ακολουθία $\phi_n \equiv \phi \uparrow \phi$.

Πρόταση 6.2.3. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $t \ge 0$. Τότε,

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu \quad \textit{και} \quad \int_X (tf) \, d\mu = t \int_X f \, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.4. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f \leq g$ στο X, τότε

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.5. Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int_X f\, d\mu = 0$, τότε $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$.

Ορισμός 6.2.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού** (και γράφουμε $\mu - \sigma.\pi.$) αν

$$\mu(\{x : \ \eta\, P(x)\ \delta\epsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota\}) = 0.$$

Πρόταση 6.2.7. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.8 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Έστω $\{f_n\}$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$ και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n(x) \to f(x)$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.9 (Θεώρημα Beppo Levi). Έστω $f, f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.10 (Λήμμα του Fatou). Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Τότε,

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

6.3 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το θετικό μέρος f^+ και το αρνητικό μέρος f^- της f.

(α) Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $\int_X f^+ d\mu < \infty$ ή $\int_X f^- d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f **ορίζεται** και θέτουμε

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

(β)Αν $\int_X f^+ d\mu < \infty$ και $\int_X f^- d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη**, με ολοκλήρωμα (όπως πριν)

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Πρόταση 6.3.2. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 6.3.3. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,

(α) $f(x) \in \mathbb{R}$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Το $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συνόλων πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση 6.3.4. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$ και το $\int_X f\, d\mu$ ορίζεται, τότε το $\int_X g\, d\mu$ ορίζεται και $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

Πρόταση 6.3.5. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $\int_X |f|\, d\mu = 0$.

(ii) $f = 0$ $\mu - \sigma.\pi.$

(iii) $\int_X f\chi_A\, d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 6.3.6. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, οι $f + g$ και tf είναι ολοκληρώσιμες, και

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \quad , \quad \int_X (tf)\, d\mu = t\int_X f\, d\mu.$$

Πρόταση 6.3.7. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ στο X, τότε

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Πρόταση 6.3.8. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.9 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n(x) \to f(x)$ $\mu - \sigma.\pi.$, $|f_n| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ και $\int_X g\, d\mu < \infty$, τότε οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.10. Έστω $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty,$$

τότε η $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται $\mu - \sigma.\pi.$, και

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.11. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_X |f - \phi|\, d\mu < \varepsilon.$$

6.3α΄ Αόριστο ολοκλήρωμα

Θεώρημα 6.3.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτιση. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_X f\chi_A\, d\mu.$$

Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) Το ν είναι μέτρο.

(ii) Αν $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$.

(iii) Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, +\infty]$ ισχύει

$$\int_X g\, d\nu = \int_X gf\, d\mu.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε το ν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \delta$, τότε $\nu(A) < \varepsilon$.