Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

7.1 Σύγκλιση κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε: $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Δηλαδή,

> Για κάθε $x \in X \setminus Z$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(β) Λέμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus Z$. Δηλαδή,

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(γ) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Από τους ορισμούς είναι φανερό ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $f_n \to f$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$ Επίσης, αν η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.2. (α) Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.3. (α) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.4. (α) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

(γ) Αν αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες $\mu - \sigma.\pi.$, τότε (β) δεν ισχύει γενικά.

7.2 Σύγκλιση κατά μέσο

Ορισμός 7.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$,

$$\int_X |f_n - f_m| \, d\mu < \varepsilon.$$

Πρόταση 7.2.2. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.2.3. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά μέσο.

Παρατήρηση 7.2.4. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

Θεώρημα 7.2.5 (Riesz). Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.2.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.2.7. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.

7.3 Σύγκλιση κατά μέτρο

Ορισμός 7.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο αν για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

Παρατήρηση 7.3.2. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε, για κάθε $a, b > 0$ ισχύει

$$\mu(\{x : |f(x) + g(x)| \geq a + b\}) \leq \mu(\{x : |f(x)| \geq a\}) + \mu(\{x : |g(x)| \geq b\}).$$

Πρόταση 7.3.3. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.3.4. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά μέτρο.

Παρατήρηση 7.3.5. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο.

Θεώρημα 7.3.6. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.3.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.3.8. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

7.4 Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$.

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A$.

Πρόταση 7.4.2. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.4.3. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Παρατήρηση 7.4.4. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.4.5. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Επιπλέον, $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.4.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.4.7. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n g_n \to fg$ σχεδόν ομοιόμορφα.

7.5 Σύγκριση των διαφόρων τύπων σύγκλισης

Θεώρημα 7.5.1 (Egoroff). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\mu(X) < \infty$ και αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ και αν υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\int_X g\, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.4 (ανισότητα Chebyshev–Markov). Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\mu(\{x \in X : \, f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X f\, d\mu.$$

Θεώρημα 7.5.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και αν υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\int_X g\, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.

Θεώρημα 7.5.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $f_n \to f$ κατά μέτρο.

(β) $\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(γ) Κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην f μ-σχεδόν παντού.