Κεφάλαιο 8

Ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκλήρωμα Riemann

8.1 Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός 8.1.1. Έστω $Q = [a_1, b_1] \times [a_k, b_k]$ ένα κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$. **Διαμέριση** του Q θα λέμε κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\Delta = \{Q_1, \dots, Q_l\}$ κλειστών μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων $Q_1, \dots, Q_l$ με $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_l$.

Έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν $\Delta = \{Q_1, \dots, Q_l\}$ είναι μια διαμέριση του Q, για κάθε $j = 1, \dots, l$ ορίζουμε

$$m_j := m_j(f, \Delta) = \inf\{f(x) : x \in Q_j\}$$

και

$$M_j = M_j(f, \Delta) = \sup\{f(x) : x \in Q_j\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα Darboux της f ως προς την Δ είναι οι αριθμοί

$$U(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{l} M_j \mathrm{vol}_k(Q_j)$$

και

$$L(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{l} m_j \mathrm{vol}_k(Q_j)$$

αντίστοιχα. Αν Δ_1, Δ_2 είναι δύο διαμερίσεις του Q, τότε

$$L(f, \Delta_1) \leq U(f, \Delta_2).$$

Ορίζουμε

$$(R_k) \underline{\int_Q} f = \sup \Big\{ L(f, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } Q \Big\}$$

και

$$(R_k) \overline{\int_Q} f = \inf \Big\{ U(f, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } Q \Big\}.$$

Τότε,

$$(R_k)\underline{\int}_Q f \leq (R_k)\overline{\int}_q f.$$

Η f λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$(R_k)\underline{\int}_Q f = (R_k)\overline{\int}_Q f.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο Q και συμβολίζεται με

$$(R_k)\int_Q f.$$

Λήμμα 8.1.2 (κριτήριο Riemann). Έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση Δ του Q ώστε

$$U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \varepsilon.$$

Θεώρημα 8.1.3. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : Q \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 8.1.4. Έστω Q κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_Q f\, d\lambda_k = (R_k)\int_Q f.$$

Θεώρημα 8.1.5. Έστω Q κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι σχεδόν παντού συνεχής.

8.2 Το θεώρημα του Lusin

Θεώρημα 8.2.1 (προσέγγιση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων). Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $g_\varepsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^k} |g_\varepsilon - f|\, d\lambda_k < \varepsilon.$$

Πόρισμα 8.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού.

Θεώρημα 8.2.3 (Lusin). Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_\varepsilon \subseteq E$ με $\lambda_k(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.