511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

1. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \limsup A_n$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $j \geq k$ ώστε $x \in A_j$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_j$ για άπειρες τιμές του j.

(β) Παρατηρήστε ότι $x \in \liminf A_n$ αν και μόνο υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $j \geq k$ να ισχύει $x \in A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_j.

(γ) Αν κάποιο $x \in X$ ανήκει σε τελικά όλα τα A_j τότε το x ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_j. Από τα (α) και (β) έπεται ότι $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Ένα παράδειγμα στο οποίο ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος παίρνουμε αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X και θέσουμε $A_{2k} = \emptyset$ και $A_{2k-1} = X$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\liminf A_n = \emptyset$ και $\limsup A_n = X$.

2. (α) Παρατηρήστε πρώτα ότι η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα του X: αν $x \in X$ τότε, επιλέγοντας δύο στοιχεία y και z του $X \setminus \{x\}$ έχουμε $\{x, y\} \in \mathcal{F}$, $\{x, z\} \in \mathcal{F}$ και $\{x\} = \{x, y\} \cap \{x, z\}$.

Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα, επομένως περιέχει όλα τα αριθμήσιμα υποσύνολα του X (αριθμήσιμες ενώσεις μονοσυνόλων). Συνεπώς,

$$\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{B} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Όμως, η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$. Άρα, $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$.

Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$.

(β) Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρήστε ότι η $\mathcal{F}$ είναι μονότονη κλάση: κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία δισυνόλων είναι αναγκαστικά σταθερή. Έπεται ότι $m(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

3. (α) Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.

1. Η $\mathcal{B}$ είναι μη κενή: $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, άρα $Y \in \mathcal{B}$.
2. Αν $B \in \mathcal{B}$ τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ και, αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(B^c) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $B^c \in \mathcal{B}$.
3. Αν $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα.

(β) Από την υπόθεση έχουμε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$. Από το (α) βλέπουμε ότι

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Εφαρμογή του (β): πάρτε $\mathcal{E}$ την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του Y, $\mathcal{C}$ την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του Y, και $\mathcal{A}$ την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X. Παρατηρήστε ότι αν $B \in \mathcal{E}$ τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

4. (α) Θέτουμε $\mathcal{F} = \big\{\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j > a_j\}, j = 1, \ldots, n,\ a_j \in \mathbb{R}\big\}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλους τους ημιχώρους της μορφής $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \geq a_j\}$, $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j < b_j\}$ και $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \leq b_j\}$, όπου $j = 1, \ldots, n$ και $a_j \in \mathbb{R}$.
2. Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα διαστήματα.

Έπεται ότι η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

(β) Έστω $\mathcal{F}_1 = \{B(x,r) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συνόλων από την $\mathcal{F}_1$. Έπεται ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην $\sigma(\mathcal{F}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

5. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X. Τότε,

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \rho(x,F) < \frac{1}{n} \right\},$$

όπου $\rho(x,F) = \inf\{\rho(x,y) : y \in F\}$. Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $A_n = \left\{x \in X : \rho(x,F) < \frac{1}{n}\right\}$ είναι ανοικτά, διότι η $x \mapsto \rho(x,F)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα, το F είναι G_δ σύνολο.

Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Από το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n ώστε $X \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Έπεται ότι το $G = (X \setminus G)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n)$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, δηλαδή F_σ–σύνολο.

6. (α) Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in B(x,\delta) \text{ να ισχύει } |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\},$$

όπου $B(x,\delta)$ η ανοικτή Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα δ. Δείξτε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ και ότι κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

(β) Ορίζουμε $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{υπάρχει το } \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, το $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι, μπορείτε να γράψετε το B στη μορφή

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m} \right\} \right) \right).$$

Από τη συνέχεια των f_k, για κάθε k και m, το σύνολο

$$\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

είναι κλειστό σύνολο (ως τομή κλειστών συνόλων). Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m} \right\} \right)$$

είναι F_σ–σύνολο. Έπεται ότι το $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ είναι $F_{\sigma\delta}$–σύνολο.

7. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \text{ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια } \mathcal{C}_A \text{ της } \mathcal{F} \text{ ώστε } A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα:

(α) Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή: αν $E \in \mathcal{F}$ τότε $X \in \sigma(\mathcal{C}_X)$ όπου $\mathcal{C}_X = \{E\} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα, $X \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Έπεται ότι $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Άρα, $A \in \mathcal{A}$ (πάρτε $\mathcal{C}_{A^c} = \mathcal{C}_A$).

(γ) Έστω $A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν αριθμήσιμες $C_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n})$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_{\cup A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Άρα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Τέλος, αν $A \in \mathcal{F}$ τότε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$ όπου $\mathcal{C}_A = \{A\} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα, $A \in \mathcal{A}$. Αφού η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.