511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

1. (α) Έχουμε $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{k=1}^{\infty}\left(\cap_{j=k}^{\infty} A_j\right)$, δηλαδή $\cap_{j=k}^{\infty} A_j \nearrow \liminf_{n\to\infty} A_n$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\cap_{j=k}^{\infty} A_j\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(\cap_{j=k}^{\infty} A_j\right).$$

Από τη μονοτονία του μ, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ έχουμε $\mu\left(\cap_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \inf_{j\geq k}\mu(A_j)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\inf_{j\geq k}\mu(A_j) = \liminf_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(β) Έχουμε $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{k=1}^{\infty}\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right)$, δηλαδή $\cup_{j=k}^{\infty} A_j \searrow \limsup_{n\to\infty} A_n$. Από την υπόθεση ότι $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ και τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right).$$

Από τη μονοτονία του μ, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ έχουμε $\mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \geq \sup_{j\geq k}\mu(A_j)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \inf_{k\in\mathbb{N}}\sup_{j\geq k}\mu(A_j) = \limsup_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$, υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty}\mu(A_j) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

2. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A\in\mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A)\geq\mu_n(A)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $A\in\mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\mu_n(\emptyset) = 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mu_n(A_k)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\cup_{k=1}^{N}A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\cup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\\ &= \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty}A_k\right).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) \leq \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty}A_k\right).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\mu_n\left(\cup_{k=1}^{\infty}A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

3. Αφού το μ είναι σ–πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\mu(E \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n \cap A_i).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_n = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι, για κάθε n και για κάθε k, το σύνολο

$$U_{n,k} = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 1/k\}$$

είναι πεπερασμένο: τα σύνολα $(E \cap B_n \cap A_i)_{i \in U_{n,k}}$ είναι ξένα και περιέχονται στο $E \cap B_n$, άρα

$$\frac{1}{k} \cdot \mathrm{card}(U_{n,k}) \leq \mu(E \cap B_n) \leq \mu(B_n) < \infty.$$

Έπεται ότι το $U_n = \cup_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ είναι αριθμήσιμο.

4. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$. Ορίζουμε

$$S = \{B \in \mathcal{A}, B \subseteq A, 0 < \mu(B) < \infty\}$$

και θέτουμε

$$s = \sup(S).$$

Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, το σύνολο S είναι μη κενό. Συνεπώς, $s > 0$.

Υποθέτουμε ότι $s < \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $B_n \in S$ ώστε $\mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq A$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $\mu(B) < \infty$, τότε $B \in S$. Επίσης,

$$\mu(B) \geq \mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(B) = s$. Θεωρούμε το $A \setminus B$: έχουμε $\mu(A \setminus B) = \infty$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $C \subseteq A \setminus B$ ώστε $0 < \mu(C) < \infty$. Όμως τότε, $B \cup C \subseteq A$ και $0 < \mu(B \cup C) < \infty$, οπότε $B \cup C \in S$ και $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > s$. Άτοπο.

(β) Αν $\mu(B) = \infty$, από την $\mu(B) = \lim_{k \to \infty} \mu\left(\cup_{n=1}^{k} B_n\right)$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{k} B_n\right) > s.$$

Αφού $\cup_{n=1}^{k} B_n \in S$, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = \infty$. Δηλαδή, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

5. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \triangle F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \triangle F^c = A \triangle F$, άρα $\mu(A^c \triangle F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$\sum_{n=k+1}^{\infty}\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n=1,\ldots,k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) \triangle F \subseteq \left(\cup_{n=k+1}^{\infty}A_n\right) \cup (A_1 \triangle F_1) \cup \cdots \cup (A_k \triangle F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\left((\cup_{n=1}^{\infty}A_n) \triangle F\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty}\mu(A_n) + \sum_{n=1}^{k}\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{k}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

6. Αφού $B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, η πληρότητα του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ εξασφαλίζει ότι $B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $A \setminus B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, συνεπώς, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) = \mu(A) - 0 = \mu(A)$. Ομοίως, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B) + 0 = \mu(A)$.

7. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$: αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι $\mu(A) < \infty$). Ειδικότερα, η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι μη κενή.

Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \in \mathcal{A}$. Άρα, $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Τέλος, έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε

$$(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) \cap A = \cup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap A) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $E_n \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\cup_{n=1}^{\infty}E_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ–πεπερασμένο. Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \cup_{n=1}^{\infty}B_n$. Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Τότε, $E \cap B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα,

$$E = \cup_{n=1}^{\infty}(E \cap B_n) \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

(γ) Δείξτε πρώτα ότι το $\tilde{\mu}$ είναι μέτρο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}})$. Έστω E ένα τοπικά μετρήσιμο σύνολο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$. Τότε, για κάθε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ με $\tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Από τον ορισμό του $\tilde{\mu}$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$ και $\tilde{\mu}(E \cap A) \leq \tilde{\mu}(A) < \infty$, δηλαδή $E \cap A \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Αφού κάθε τοπικά μετρήσιμο σύνολο του $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι στην $\tilde{\mathcal{A}}$, ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

8. (α)$\Longrightarrow$(γ): Παρατηρούμε πρώτα ότι $\mu(X) > 0$: αλλιώς θα είχαμε $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{0\}$. Επίσης, υπάρχει $A_1 \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A_1) < \mu(X)$: αλλιώς θα είχαμε $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{0, \mu(X)\}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί ξένα σύνολα $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, k$ και $\mu(B_k) > 0$, όπου $B_k = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)$. Παρατηρήστε ότι κάποιο από τα σύνολα

$$U_{n,k} = \{\mu(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq A_n\} \quad (n \leq k) \quad \text{ή} \quad J_k = \{\mu(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq B_k\}$$

είναι άπειρο. Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\mu(A) = \mu(A \cap A_1) + \cdots + \mu(A \cap A_k) + \mu(A \cap B_k) \in U_{1,k} + \cdots + U_{k,k} + J_k.$$

Αν λοιπόν τα $U_{n,k}$ $(n \leq k)$ και J_k ήταν πεπερασμένα, τότε το $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ θα ήταν πεπερασμένο. Συνεχίζουμε ως εξής:

1. Αν το J_k είναι άπειρο, βρίσκουμε $A_{k+1} \in \mathcal{A}$, ξένο πρός τα $A_1, \ldots, A_k$, με $\mu(A_{k+1}) > 0$ και $\mu(B_k \setminus A_{k+1}) > 0$. Τα σύνολα $A_1, \ldots, A_{k+1}$ έχουν θετικό μέτρο, το ίδιο και το $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1})$.

2. Αν κάποιο $U_{n,k}$ είναι άπειρο, βρίσκουμε ξένα $A'_n, A''_n \in \mathcal{A}$ με $A_n = A'_n \cup A''_n$ και $\mu(A'_n) > 0$, $\mu(A''_n) > 0$. Τότε, τα $A_m, m \neq n$ και A'_n, A''_n έχουν θετικό μέτρο, το ίδιο και το συμπλήρωμα της ένωσής τους.

Δηλαδή, υπάρχουν ξένα σύνολα $A_1, \ldots, A_{k+1} \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, k+1$ και $\mu(B_{k+1}) > 0$, όπου $B_{k+1} = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1})$.

Η διαδικασία αυτή ορίζει άπειρη ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ)$\Longrightarrow$(β): Θεωρούμε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty,$$

συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$.

(β)$\Longrightarrow$(α): Ας υποθέσουμε ότι το $M = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο. Από την υπόθεση, το σύνολο των θετικών στοιχείων του M είναι μη κενό, άρα το M έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο $\mu(B) = \varepsilon > 0$, για κάποιο $B \in \mathcal{A}$. Τότε, πάλι από την υπόθεση, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το M είναι άπειρο.