511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

1. (α) Από τον ορισμό του μ^* έχουμε $\mu^*(\emptyset) = 0$. Επίσης, αν $A \subseteq B \subseteq X$ έχουμε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (αν $B \neq \emptyset$ τότε $\mu^*(A) \leq 1 = \mu^*(B)$ ενώ αν $B = \emptyset$ τότε $A = \emptyset$ και $\mu^*(A) = 0 = \mu^*(B)$).

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Αν $A_n = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, άρα $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A_m \neq \emptyset$, τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, άρα

$$\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 = \mu^*(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε, $\mu^*(A) = \mu^*(X \setminus A) = 1$. Συνεπώς,

$$\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A^c \cap X) = 2 > 1 = \mu^*(X).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

2. (α) Δείξτε ότι:

1. Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.
2. Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

Για παράδειγμα, αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε

$$E \subset \left(\cup_{j=1}^{k-1} \{n_{2j-1}, n_{2j}\}\right) \cup \{n_{2k-1}, n_1\},$$

άρα

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \tau(\{n_{2j-1}, n_{2j}\}) + \tau(\{n_{2k-1}, n_1\}) = 2k.$$

Αφού το E δεν καλύπτεται από λιγότερα από k δισύνολα, έχουμε $\mu^*(E) = 2k$.

Τέλος, αν το E έχει άπειρα στοιχεία τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_k \subset E$ με $\mathrm{card}(A_k) = 2k$. Άρα, $\mu^*(E) \geq \mu^*(A_k) = 2k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mu^*(E) = \infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αν $m \in A$ και $n \notin A$ τότε για το $E = \{m, n\}$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(\{m\}) + \mu^*(\{n\}) = 2 + 2 = 4 > 2 = \mu^*(E).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

3. Θεωρούμε τα σύνολα $A_m = \{m\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\cup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{N}$. Άρα,

$$\varphi\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{card}(\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \geq m$ έχουμε $\mathrm{card}(A_m \cap \{1, \ldots, n\}) = 1$. Άρα,

$$\varphi(A_m) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{card}(A_m \cap \{1, \ldots, n\}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\varphi\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = 1 > 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

Αφού η φ δεν είναι σ–υποπροσθετική, η φ δεν είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

4. Έχουμε δείξει ότι αν $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X τότε

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap E)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(B_n\cap E)$$

για κάθε $E\subseteq X$. Επίσης, για κάθε $N\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{N}(B_n\cap E)\big)=\sum_{n=1}^{N}\mu^*(B_n\cap E).$$

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Ορίζουμε $B_1=A_1$ και $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$ για $n\geq 2$. Τότε, τα σύνολα B_n είναι ξένα και μ^*–μετρήσιμα. Επίσης $\cup_{n=1}^{\infty}B_n=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ και $\cup_{n=1}^{N}B_n=\cup_{n=1}^{N}A_n=A_N$ για κάθε $N\in\mathbb{N}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap E)\big) &= \mu^*\big((\cup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap E\big)=\mu^*\big((\cup_{n=1}^{\infty}B_n)\cap E\big)\\
&= \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap E)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(B_n\cap E)\\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\mu^*(B_n\cap E)\right)=\lim_{N\to\infty}\mu^*\big((\cup_{n=1}^{N}B_n)\cap E\big)\\
&= \lim_{N\to\infty}\mu^*(A_N\cap E).
\end{aligned}$$

5. (α) Αποδεικνύουμε την σ–υποπροσθετικότητα του μ^*. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\mu^*(E_n)<\infty$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon>0$. Για κάθε n βρίσκουμε $A_n\in\mathcal{A}$ ώστε $E_n\subseteq A_n$ και $\mu(A_n)<\mu^*(E_n)+\varepsilon/2^n$. Τότε, $\cup_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}A_n$, και

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\big)\leq\mu\big(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$.

(β) Έστω $(X,\tilde{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ η πλήρωση του μ. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Αν $A\in\mathcal{A}$ τότε $\mu^*(A)=\mu(A)$.

2. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_{\mu_*}$. Θα χρειαστείτε την εξής παρατήρηση: αν $E\subseteq X$ με $\mu^*(E)<\infty$, τότε υπάρχουν $F_n\in\mathcal{A}$ ώστε $F_n\supseteq E$ για κάθε n και $\mu(F_n)<\mu^*(E)+\frac{1}{n}$. Συνεπώς, $F=\cap_{n=1}^{\infty}F_n\supseteq E$ και $\mu(F)=\mu^*(E)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να γράψουμε

   $$\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\leq\mu(F\cap A)+\mu(F\cap A^c)=\mu(F)=\mu^*(E)$$

   για κάθε $A\in\mathcal{A}$.

3. Αν $A,F\in\mathcal{A}$, $\mu(F)=0$ και $B\subseteq F$, τότε $A\cup B\in\mathcal{A}_{\mu^*}$. Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}}\subseteq\mathcal{A}_{\mu^*}$.

4. Αν $A\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\overline{\mu}(A)=\mu^*(A)<\infty$, τότε $A\in\tilde{\mathcal{A}}$. Θα βοηθήσει η παρατήρηση του Βήματος 2.

5. Αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\mathcal{A}_{\mu^*}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$.

6. (α) Έχουμε $G_2\setminus G_1\subseteq G_2\setminus E$ διότι $E\subseteq G_1$. Αφού $G_2\setminus G_1\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ και το G_2 είναι μετρήσιμο κάλυμα του E, συμπεραίνουμε ότι $\mu(G_2\setminus G_1)=0$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mu(G_1\setminus G_2)=0$. Συνεπώς,

$$\mu(G_1\triangle G_2)=\mu(G_2\setminus G_1)+\mu(G_1\setminus G_2)=0.$$

Τέλος, από τις $\mu(G_1\setminus G_2)=\mu(G_1\setminus G_2)=0$ έπεται ότι

$$\mu(G_2)=\mu(G_2\cap G_1)+\mu(G_2\setminus G_1)=\mu(G_2\cap G_1)+\mu(G_1\setminus G_2)=\mu(G_1).$$

(β) Έστω $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ με $A \subseteq G \setminus E$. Τότε, $E \subseteq G \setminus A$. Άρα,

$$\mu(G) = \mu^*(E) \leq \mu^*(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονοτονία του μ^*, το γεγονός ότι $G \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και την υπόθεση ότι $\mu(G) < \infty$. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$. Άρα, το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

7. (α) Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$: η μόνη ιδιότητα που χρειάζεται προσοχή είναι η σ–υποπροσθετικότητα. Πιο συγκεκριμένα, η περίπτωση $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Παρατηρήστε ότι τουλάχιστον ένα από τα A_n είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, τα $A_{m_1}, \ldots, A_{m_s}$, και κανένα από αυτά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, s$ υπάρχει $\alpha_j > 0$ ώστε το σύνολο $\{x \in A_{m_j} : |x| > \alpha_j\}$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, αν θέσουμε $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\{x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n : |x| > \alpha\}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι άτοπο.

Απομένουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

1. Κάποιο A_m έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Τότε, $\mu^*(A_m) = \infty$, άρα

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty = \mu^*(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

2. Υπάρχουν άπειρα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, κανένα όμως δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Αφού $\mu^*(A_m) = 1$ για καθένα από αυτά, παίρνουμε

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(β) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = 0 + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$$

από τη μονοτονία του μ^*. Έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, και συνεπώς,

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έστω τώρα A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με υπεραριθμήσιμο συμπλήρωμα. Μπορούμε να βρούμε υπεραριθμήσιμα $G \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τα οποία δεν έχουν σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί). Αν θέσουμε $E = G \cup F$ τότε το E δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(G) + \mu^*(F) = 1 + 1 = 2 > 1 = \mu^*(E).$$

Άρα, $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(γ) Κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μ^*–μετρήσιμο κάλυμα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Το E είναι αριθμήσιμο. Τότε, $E \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ οπότε μπορούμε να πάρουμε $G = E$.

2. Το E είναι υπεραριθμήσιμο. Παίρνουμε $G = \mathbb{R}$. Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $A \subseteq \mathbb{R} \setminus E = E^c$, τότε το A δεν έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (παρατηρήστε ότι $A^c \supseteq E$) άρα είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$.