511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι τα A και B είναι φραγμένα, δηλαδή υπάρχουν διαστήματα I και J ώστε: $A \subseteq I$ και $B \subseteq J$. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

1. $\lambda_2^*(A\times B) \le \lambda_1(A)\lambda_2(B)$. Θεωρούμε τυχούσες καλύψεις $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ και $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ των A και B. Τότε, η $\{R_m \times Q_n\}_{m,n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $A\times B$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda_2^*(A\times B) &\le \sum_{n,m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m\times Q_n) = \sum_{n,m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m)\mathrm{vol}(Q_n)\\ &= \left(\sum_{m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m)\right)\left(\sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_n)\right).\end{aligned}$$

   Πάρτε infimum ως προς όλες τις δυνατές καλύψεις.

2. Το $A\times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Πράγματι, υπάρχουν F_σ σύνολα E, F και σύνολα N, Z μηδενικού μέτρου ώστε $A = E\cup N$ και $B = F\cup Z$. Τότε,

$$A\times B = (E\cup N)\times(F\cup Z) = (E\times F)\cup(N\times F)\cup(E\times Z)\cup(N\times Z).$$

   Το $E\times F$ είναι F_σ σύνολο και τα υπόλοιπα τρία σύνολα είναι μηδενικού μέτρου (από το προηγούμενο βήμα). Άρα, το $A\times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3. Παρατηρήστε ότι

$$I\times J = (A\times B)\cup((I\setminus A)\times B)\cup(A\times(J\setminus B))\cup((I\setminus A)\times(J\setminus B)).$$

   Όλα τα σύνολα είναι μετρήσιμα από το δεύτερο βήμα. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda_1(I)\lambda_1(J) &= \lambda_2(I\times J)\\ &= \lambda_2(A\times B)+\lambda_2((I\setminus A)\times B)+\lambda_2(A\times(J\setminus B))+\lambda_2((I\setminus A)\times(J\setminus B))\\ &\le \lambda_1(A)\lambda_1(B)+\lambda_1(I\setminus A)\lambda_1(B)+\lambda_1(A)\lambda_1(J\setminus B)+\lambda_1(I\setminus A)\lambda_1(J\setminus B)\\ &= [\lambda_1(A)+\lambda_1(I\setminus A)]\cdot[\lambda_1(B)+\lambda_1(J\setminus B)]\\ &= \lambda_1(I)\lambda_1(J).\end{aligned}$$

   Πρέπει να έχουμε παντού ισότητες: ειδικότερα, $\lambda_2(A\times B) = \lambda_1(A)\lambda_2(B)$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τα διαστήματα $I_n = [-n, n]$ και ορίζουμε $A_n = A\cap I_n$, $B_n = B\cap I_n$. Τότε, $A_n\times B_n \nearrow A\times B$, άρα το $A\times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\lambda_2(A\times B) = \lim_{n\to\infty}\lambda_2(A_n\times B_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda_1(A_n)\lambda_1(B_n) = \lambda_1(A)\lambda_1(B).$$

2. Μιμούμαστε την κατασκευή του συνόλου του Cantor. Θεωρούμε το διάστημα $I^0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε δέκα ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα $\left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right]$. Ονομάζουμε I^1 το σύνολο που απομένει, το οποίο αποτελείται από εννέα διαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$.

Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε δέκα ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα. Ονομάζουμε I^2 το σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα σύνολο I^n έτσι ώστε η ακολουθία (I^n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^n \supset I^{n+1}$ για κάθε $n \ge 0$.
2. Το I^n είναι η ένωση 9^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^n}$.

Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=0}^\infty I^n$. Το C είναι μετρήσιμο και από την $\lambda(I^n) = 9^n/10^n$ έπεται ότι $\lambda(C) = 0$. Παρατηρήστε ότι το $x\in[0,1]$ δεν έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που να περιέχει το ψηφίο 4 αν και μόνο αν $x \in C$.

3. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$.

Απόδειξη. Αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ώστε $W \subseteq Q_1 := [a,b] \times Q$. Ορίζουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in Q_1 : a \leq x_1 \leq t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leq \lambda_{k-1}(Q)\,|t-s|.$$

Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

4. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{J_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A).$$

Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap J_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap J_m) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\,\lambda^*(J_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$ έχουμε το ζητούμενο.

5. Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δουλεύει στον $\mathbb{R}^k$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{N}$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι κορυφές των διαστημάτων J_n έχουν κορυφές με ρητές συντεταγμένες.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στα E και F, μπορούμε να βρούμε διαστήματα I_0 και J_0 με «ρητές κορυφές», ώστε

$$(*) \qquad \lambda(E \cap I_0) \geq \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_0) \geq \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Ισχυρισμός. Μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n ίσους μη επικαλυπτόμενους κύβους αντίστοιχα (άσκηση: χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι οι ακμές των I_0 και J_0 έχουν ρητά μήκη).

Η $(*)$ και ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό της Άσκησης 4 δείχνουν ότι υπάρχουν κύβοι I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος ακμής, ώστε

$$\lambda(E \cap I_1) \geq \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_1) \geq \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει κύβος I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^k$ ώστε

$$\lambda((E-x) \cap I) \geq \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((F-y) \cap I) \geq \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((E-x) \cap (F-y) \cap I) \geq \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $B = (E - x) \cap (F - y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $B - B$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$E - F - (x + y) = (E - x) - (F - y) \supseteq B - B,$$

συμπεραίνουμε ότι το $E - F$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το F με το $-F$ παίρνουμε το ζητούμενο.

6. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές.
2. Αν το $E \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι F_σ–σύνολο τότε το E μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Από το προηγούμενο βήμα, το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο.
3. Η T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x) - T(y)\|_2 \leq M \, \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$.
4. Αν R είναι ένας κύβος (διάστημα με ισομήκεις ακμές) στον $\mathbb{R}^k$, τότε το $T(R)$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας το πολύ ίσης με $\frac{M \cdot d}{2} = \frac{M\sqrt{k}\alpha}{2}$ όπου d η διάμετρος και α η ακμή του R. Δηλαδή, υπάρχει $c = c(M, k) > 0$ ώστε το $T(R)$ να περιέχεται σε κύβο ακμής $c\alpha$. Έπεται ότι $\lambda(T(R)) \leq c^k \lambda(R)$.
5. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την παρατήρηση ότι για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου του A αρκεί να θεωρήσουμε καλύψεις του A με κύβους, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Γράφοντας το τυχόν μετρήσιμο σύνολο σαν ένωση ενός F_σ–συνόλου και ενός συνόλου μέτρου 0 παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

7. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leq \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : \, F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leq \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leq \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0, 1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

8. *Πρώτος τρόπος*. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0, 1]$:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E \subset [0, 1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1, 1]$ και ορίζουμε $E_n = q_n + E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0, 1] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1 = \lambda([0, 1]) \leq \lambda^* \left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Άρα,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = +\infty > 3 = \lambda([-1,2]) \geq \lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$
Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε
$$\lambda^*(E) < \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$
Θεωρήστε τα σύνολα $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap A^c$, $E_3 = E_4 = \cdots = \emptyset$.