511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

1. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leq \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leq q_n \leq 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1+1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [-1/j, 1+1/j] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leq \lambda(A(1/j)) \leq 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A(1/j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A(1/j)) \right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

2. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι το A είναι φραγμένο υποσύνολο του $[0,\infty)$. Δηλαδή, υπάρχει $m > 0$ ώστε $A \subseteq [0,m]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lambda(A) = 0$, υπάρχει ακολουθία $\{R_k\}$ διαστημάτων $R_k = [a_k, b_k] \subset [0,\infty)$ ώστε $A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} R_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon$. Τότε,

$$\{x^2 : x \in A\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k^2, b_k^2]$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k^2 - a_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)(b_k + a_k) \leq 2m \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < 2m\varepsilon.$$

Αφού $\lambda^*(\{x^2 : x \in A\}) \leq 2m\varepsilon$ για το τυχόν $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A\}) = 0$.

Έστω τώρα $A \subset [0,\infty)$ με $\lambda(A) = 0$. Ορίζουμε $A_m = A \cap [0,m]$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε, $\lambda(A_m) = 0$ και το προηγούμενο βήμα δείχνει ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A_m\}) = 0$. Αφού

$$\{x^2 : x \in A\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x^2 : x \in A_m\},$$

έπεται ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A\}) = 0$. Το ίδιο ισχύει αν $A \subset (-\infty, 0]$ και $\lambda(A) = 0$.

Για την γενική περίπτωση, αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) = 0$, ορίζουμε $A^+ = \{x \in A : x \geq 0\}$, $A^- = \{x \in A : x < 0\}$ και, χρησιμοποιώντας το πρόηγούμενο βήμα, παίρνουμε

$$\lambda(B) \leq \lambda(\{x^2 : x \in A^+\}) + \lambda(\{x^2 : x \in A^-\}) = 0.$$

3. (α) Το C είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων: έχουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}$ και κάθε $I^{(n)}$ είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων.

(β) Το C δεν έχει μεμονωμένα σημεία: έστω $x \in C$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το x ανήκει σε κάποιο από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το $I^{(n)}$. Τουλάχιστον ένα από τα άκρα του $I_k^{(n)}$, ας το πούμε y_n, είναι διαφορετικό από το x. Το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $1/3^n$, άρα $|x - y_n| \leq 1/3^n$.

Κάθε άκρο διαστήματος $I_k^{(n)}$ είναι σημείο του C. Συνεπώς, $y_n \in C$, $y_n \neq x$ και $y_n \to x$. Έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του C.

(γ) Αν κάποιο (μη τετριμμένο) διάστημα J περιέχεται στο C, τότε για κάθε n έχουμε $J \subseteq I_k^{(n)}$, όπου $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$. Τότε, $\lambda(J) \leq \lambda(I_k^{(n)}) = 1/3^n$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(J) = 0$, άτοπο.

4. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα $I_k^{(n)}$, και χωρίζει το $I_k^{(n)}$ σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν n περιττός και $1:3$ αν n άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το $I^{(n)}$.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^{(n)} = (a, b)$ και $x - a = 3(b - x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a, b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$, $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

5. (α) Αν $c_n \in \{0, 1, 2\}$ τότε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1.$$

(β) Έστω $x \in [0, 1]$. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ στα τρία υποδιαστήματα $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ και $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \text{ αν } x \in \big[0, 1/3\big] \\ c_1 &= 1, \text{ αν } x \in \big(1/3, 2/3\big) \\ c_1 &= 2, \text{ αν } x \in \big[2/3, 1\big]. \end{aligned}$$

Έτσι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε

$$\frac{c_1}{3} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ και $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, και θέτουμε $c_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το c_2 όταν $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ή $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, έτσι ώστε, σε κάθε περίπτωση, να έχουμε

$$\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των c_n με αυτό τον τρόπο έτσι ώστε, για κάθε N, να έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} \leq x \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^N}.$$

Αφού λοιπόν, για κάθε N έχουμε $0 \leq x - \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^N}$, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$ συγκλίνει στο x, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}.$$

(γ) Έστω ότι κάποιος $x \in [0, 1]$ έχει δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Έστω n ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $c_k \neq b_k$, και ας υποθέσουμε ότι $c_n < b_n$. Αφού

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

και

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} \leq \frac{c_n}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{c_n+1}{3^n} \leq \frac{b_n}{3^n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

βλέπουμε ότι

$$b_n = c_n + 1, \quad c_k = 2 \text{ αν } k > n, \quad b_k = 0 \text{ αν } k > n.$$

Συνεπώς,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{3^k} = \frac{m}{3^n},$$

όπου $m = b_1 3^{n-1} + b_2 3^{n-2} + \cdots + b_n$.

Αντίστροφα, αν $x = m/3^n$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, γράφουμε τον m στη μορφή $m = b_1 3^{n-1} + b_2 3^{n-2} + \cdots + b_n$, όπου $b_j \in \{0,1,2\}$ και $b_n \neq 0$, και παίρνουμε δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα για τον x, τα $0 \cdot b_1 b_2 \cdots b_n$ και $0 \cdot b_1 \cdots b_{n-1}(b_n - 1) 2 \cdots 2 \cdots$.

(δ) Έστω $x \in [0,1]$ και $0 \cdot c_1 c_2 \cdots$ η τριαδική παράσταση που βρήκαμε για τον x στο (β). Είναι φανερό ότι $x \in I^{(1)}$ αν και μόνο αν $c_1 = 0$ ή $c_1 = 2$. Επίσης, $x \in I^{(2)}$ αν και μόνο αν $c_1 \in \{0,2\}$ και $c_2 \in \{0,2\}$. Με τον ίδιο τρόπο, $x \in I^{(n)}$ αν και μόνο αν $c_1, \ldots, c_n \in \{0,2\}$. Αν τώρα $x \in C$, τότε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)}$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \{0,2\}$.

Έστω τώρα $x \in [0,1] \setminus C$ και έστω $0 \cdot c_1 c_2 \cdots$ μια τριαδική παράσταση του x. Αν $x \notin I^{(1)}$, τότε $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Αλλά, από τη σχέση $\frac{c_1}{3} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{1}{3}$ παίρνουμε $0 < c_1 < 2$, άρα $c_1 = 1$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \geq 2$, έχουμε $x \in I^{(n-1)}$ αλλά $x \notin I^{(n)}$. Αφού $x \notin I^{(n)}$, το x δεν μπορεί να είναι άκρο κάποιου τριαδικού διαστήματος από αυτά που αποτελούν το $I^{(n-1)}$. Υπάρχει λοιπόν μοναδικό ανοιχτό τριαδικό διάστημα μήκους $\frac{1}{3^{n-1}}$ στο οποίο ανήκει το x και, αναγκαστικά, αυτό είναι το

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n-1}} \right).$$

Το γεγονός ότι $x \notin I^{(n)}$ σημαίνει ότι το x ανήκει στο μεσαίο ανοιχτό τρίτο αυτού του διαστήματος, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} < x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{2}{3^n}.$$

Από αυτό και τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{c_n}{3^n} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{c_n+1}{3^n}$$

παίρνουμε $0 < c_n < 2$, δηλαδή $c_n = 1$. Αν λοιπόν $x \notin C$, τότε, για τον ελάχιστο φυσικό n με $x \notin I^{(n)}$, ισχύει $c_n = 1$.

6. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\delta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\delta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\delta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\delta}{3^2} = 1 - \frac{\delta}{3} - 2\frac{\delta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geq 0$.

2. Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

3. $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\delta}{3} - 2\frac{\delta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\delta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$D_\delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(D_\delta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \delta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1 - \delta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1 - \delta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 3, μπορούμε να δείξουμε ότι το D_δ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

7*. Από την προηγούμενη Άσκηση ισχύει το εξής: αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n–οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0 < \delta < 1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

1. $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

2. $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2\cdots\delta_n$.

3. Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \delta_1\cdots\delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leq b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a, b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leq \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leq \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1 - \delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1}\delta_{n+2} \cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$