511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

1. Υποθέτουμε ότι $f^{-1}((q,+\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία ρητών $q_n \to \alpha$. Γράφουμε

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > q_n\}.$$

Πράγματι, αν $f(x) > \alpha$ τότε τελικά έχουμε $f(x) > q_n$ (και αντίστροφα, αν $f(x) > q_n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, τότε $f(x) > \alpha$). Αφού $\{x \in X : f(x) > q_n\} \in \mathcal{A}$ για κάθε n, έπεται ότι $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$. Αφού το $\alpha \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανής: ξέρουμε ότι αν η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη τότε $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f(x) = q_n\}.$$

Αφού η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη, έχουμε $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Παρατηρήστε ότι $g = 1 - \chi_E$. Αφού $E \in \mathcal{A}$, η g είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

3. *Πρώτος τρόπος.* Ελέγξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ είναι (ανοικτή ή κλειστή) ημιευθεία ή το κενό σύνολο ή το $\mathbb{R}$.

Δεύτερος τρόπος. Αφού η f είναι αύξουσα, το σύνολο A των σημείων ασυνέχειας της f είναι αριθμήσιμο.

Θα δείξουμε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με αριθμήσιμο σύνολο σημείων ασυνέχειας είναι Borel μετρήσιμη. Έστω $C = \mathbb{R} \setminus A$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γράφουμε

$$f^{-1}(U) = \big(f^{-1}(U) \cap C\big) \cup \big(f^{-1}(U) \cap A\big).$$

Το $f^{-1}(U) \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Το $f^{-1}(U) \cap C$ είναι ανοικτό στο C: έστω $x \in C$ ώστε $f(x) \in U$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset U$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|y-x| < \delta$ τότε $f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset U$. Δηλαδή, $f^{-1}(U) \cap C \supseteq (x-\delta, x+\delta) \cap C$.

Είδαμε ότι το $f^{-1}(U) \cap C$ είναι ανοικτό στο C, άρα υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $f^{-1}(U) \cap C = V \cap C$. Όμως, $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, $f^{-1}(U) \cap C = V \cap C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι το $f^{-1}(U)$ είναι Borel ως ένωση δύο συνόλων Borel. Αφού αυτό ισχύει για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$, η f είναι Borel μετρήσιμη.

4. (α) Έστω $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αφού η h είναι Borel μετρήσιμη, έχουμε $h^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Η g είναι συνεχής, άρα $g^{-1}(h^{-1}(U)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Άσκηση 3(γ), Φυλλάδιο 2). Είδαμε ότι $(h \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(h^{-1}(U)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε $m : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $m(x) = \frac{f(x)+x}{2}$. Η m είναι γνησίως αύξουσα και επί του $[0,1]$. Θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της m και την επεκτείνουμε σε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας $g(x) = 0$ αν $x < 0$ και $g(x) = 1$ αν $x > 1$. Γνωρίζουμε ότι η εικόνα $m(C)$ του συνόλου του Cantor μέσω της m έχει θετικό μέτρο (ίσο με $1/2$), άρα υπάρχει μη–μετρήσιμο $A \subseteq m(C)$ (το οποίο δεν περιέχει τα $0, 1$). Αν $E = g(A)$, τότε το E περιέχεται στο C, άρα είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έπεται ότι η συνάρτηση $h = \chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Θεωρούμε την $h \circ g = \chi_E \circ g$. Παρατηρήστε ότι η $h \circ g$ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, και ότι $(h \circ g)(x) = 1$ αν και μόνο αν $g(x) \in E$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \in A$. Άρα,

$$h \circ g = \chi_E \circ g = \chi_A.$$

Αφού το A είναι μη–μετρήσιμο, η $h \circ g$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη.

5. (α) Αν $t < s$ τότε $\{f > s\} \subseteq \{f > t\}$, άρα

$$\omega_f(s) = \lambda(\{f > s\}) \leq \lambda(\{f > t\}).$$

Δηλαδή, η ω_f είνα φθίνουσα. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $E_t = \{f > t\}$ και $E_{t,n} = \{f > t + \frac{1}{n}\}$, τότε $E_{t,n} \nearrow E_t$, άρα $\omega_f(t + \frac{1}{n}) \to \omega_f(t)$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq \omega_f(t) - \omega_f(t + \frac{1}{n_0}) < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $t < s < t + \frac{1}{n_0}$ έχουμε $\omega_f(t) - \omega_f(s) < \varepsilon$. Έπεται ότι η ω_f είναι συνεχής από δεξιά.

Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι $\lim_{s \to t^-} \omega_f(s) = \lambda(\{f \geq t\})$. Άρα, η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνο αν $\lambda(\{f \geq t\}) = \lambda(\{f > t\})$. Δηλαδή, αν $\lambda(\{f = t\}) = 0$.

(β) Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $F_{k,t} = \{f_k > t\}$ και $F_t = \{f > t\}$, τότε $F_{k,t} \nearrow F_t$: πράγματι, από την $f_k \leq f_{k+1}$ έχουμε

$$f_k(x) > t \Longrightarrow f_{k+1}(x) > t,$$

δηλαδή $F_{k,t} \subseteq F_{k+1,t}$. Επίσης, $f(x) \geq f_{k+1}(x)$ για κάθε $x \in E$, άρα $F_t \supseteq \cup_{k=1}^{\infty} F_{k,t}$. Αντίστροφα, αν $f(x) > t$ τότε $\lim_{k \to \infty} f_k(x) > a$, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f_k(x) > t$. Συνεπώς, $F_t \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} F_{k,t}$. Είδαμε ότι $F_{k,t} \nearrow F_t$, άρα

$$\lambda(F_{k,t}) \nearrow \lambda(F_t).$$

Ισοδύναμα, $\omega_{f_k}(t) \nearrow \omega_f(t)$.

6. (α) Θέτουμε $E_n = \{f_n > \alpha\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty,$$

άρα $\lambda(\limsup_n E_n) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $x \notin \limsup_n E_n$ για κάθε $x \notin N$. Έστω $x \notin N$. Τότε, $x \notin \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E_n$, άρα υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq k$ ισχύει $x \notin E_n \Longrightarrow f_n(x) \leq \alpha$. Όμως τότε, $\limsup_n f_n(x) \leq \alpha$.

(β) Όπως πριν, βλέπουμε ότι υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε για κάθε $x \notin N$ ισχύει το εξής: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Αφού $\varepsilon_n \to 0$, συμπεραίνουμε ότι $f_n(x) \to 0$.

7. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε $F_{n,m} := \{|f_n| > m\}$. Παρατηρούμε ότι $F_{n,m} \searrow \emptyset$. Άρα, υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$ (πάρτε $\beta_n = m$ για m αρκετά μεγάλο).

Θέτουμε $\alpha_n = n\beta_n$. Τότε, αν θέσουμε

$$E_n = \left\{x \in [0,1] : \frac{|f_n(x)|}{\alpha_n} > \frac{1}{n}\right\} = \{x \in [0,1] : |f_n(x)| > \beta_n\},$$

έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left\{x \in [0,1] : \frac{|f_n(x)|}{\alpha_n} > \frac{1}{n}\right\}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Από την προηγούμενη Άσκηση (με $\varepsilon_n = 1/n$) έπεται ότι υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin N$.

8. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $[0,1]$ σε k ίσα διαστήματα $\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$, $j = 1, \ldots, k$. Ορίζουμε $f_k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x,y) = f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) \quad \text{αν } \frac{j-1}{k} \leq x < \frac{j}{k}$$

και $f_k(1,y) = f(1,y)$. Η f_k είναι μετρήσιμη διότι είναι συνεχής σχεδόν παντού: αν $\frac{j-1}{k} < x < \frac{j}{k}$, $y \in [0,1]$ και $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: $(x - \delta, x + \delta) \subset \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$ και

$$\left|f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) - f\left(\frac{j-1}{k}, y'\right)\right| \quad \text{αν } |y - y'| < \delta$$

από τη συνέχεια της $f\left(\frac{j-1}{k}, y\right)$ ως προς y. Τότε, αν $(x', y') \in (x-\delta, x+\delta) \times (y-\delta, y+\delta)$ έχουμε

$$|f_k(x', y') - f_k(x, y)| = \left| f\left(\frac{j-1}{k}, y'\right) - f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) \right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η f_k είναι συνεχής στο $[0,1] \times [0,1] \setminus \cup_{j=0}^{k} (\{\frac{j}{k}\} \times [0,1])$.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $y < 1$, τότε $f_k(x, y) \to f(x, y)$: αφού η $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|x' - x| < \delta$ τότε $|f(x', y) - f(x, y)| < \varepsilon$. Υπάρχει k_0 ώστε $\frac{1}{k} < \delta$ για κάθε $k \geq k_0$. Τότε, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$$|f_k(x, y) - f(x, y)| = \left| f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) - f(x, y) \right| < \varepsilon$$

διότι $\left|\frac{j-1}{k} - x\right| \leq \frac{1}{k} < \delta$.

Δείξαμε ότι η f είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων, άρα η f είναι μετρήσιμη.