511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

1. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη λόγω της $\mu(X) < \infty$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon \mu(X).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

2. Η σταθερή συνάρτηση M είναι ολοκληρώσιμη λόγω της $\mu(X) < \infty$, οπότε, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

3. Από τις $|f_n| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, έπεται ότι $|f| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ Άρα,

$$|f_n - f| \leq 2g$$

$\mu - \sigma.\pi.$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $|f_n - f| \to 0$ $\mu - \sigma.\pi.$, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

4. Αφού $f_n \leq f$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Άρα,

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

5. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και τελικά οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε $-g_n \leq f_n \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X (f+g) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g_n) \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$). Άρα,

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X (g-f) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n - f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Άρα,

$$\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu.$$

6. Έστω $A\in\mathcal{A}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_A f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$$

και

$$\int_{X\setminus A} f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_{X\setminus A} f_n\,d\mu$$

δηλαδή

$$\int_X f\,d\mu - \int_A f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\,d\mu - \int_A f_n\,d\mu\right).$$

Αφού

$$-\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(-\int_X f_n\,d\mu\right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_A f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_A f_n\,d\mu\right) = -\limsup_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu \le \int_A f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f_n\,d\mu \to \int_A f\,d\mu.$$

7. $(\Longrightarrow)$ Έχουμε

$$\left|\int_X |f_n|\,d\mu - \int_X |f|\,d\mu\right| \le \int_X \big||f_n|-|f|\big|\,d\mu \le \int_X |f_n-f|\,d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu.$$

$(\Longleftarrow)$ Έχουμε $\big||f_n-f|-|f_n|\big|\le |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n-f|-|f_n|\to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_X (|f_n-f|-|f_n|)\,d\mu \to \int_X (-|f|)\,d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int_X |f_n-f|\,d\mu \to 0.$$

8. Παρατηρήστε ότι

$$g_n = \max\{f_1, \dots, f_n\} \leq \max\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}\} = g_{n+1}.$$

Ορίζουμε $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ (η g ορίζεται καλά, διότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα). Αφού $g_n \geq 0$ στο X, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_X g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\int_X g_n\, d\mu \leq M$. Συνεπώς,

$$\int_X g\, d\mu \leq M < \infty.$$

Όμως, $f_n \leq g_n \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $f_n \to 0$ $\mu-\sigma.\pi.$ Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X f_n\, d\mu \to 0.$$