511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

1. (α) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. Η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|z-y| < \delta$ τότε $|\phi(z) - \phi(y)| < \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}.$$

Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) < \eta.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta.$$

Αφού το $\eta > 0$ ήταν τυχόν,

$$\mu(\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

Δηλαδή, $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ κατά μέτρο.
(β) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \varepsilon$, ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Αφού η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$: θεωρήστε τυχόν $\eta > 0$ και βρείτε $\delta > 0$ ώστε: αν $|z-y| < \delta$ τότε $|\phi(z) - \phi(y)| < \eta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus A$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \text{ και συνεπώς, } |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| < \eta.$$

2. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\chi_{E_n \triangle E_m} = |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|$. Συνεπώς,

$$\mu(E_n \triangle E_m) = \int_X \chi_{E_n \triangle E_m}\, d\mu = \int_X |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|\, d\mu$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.
(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την

$$\mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |\chi_{E_n} - \chi_{E_m}|\, d\mu$$

έπεται ότι αν η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο τότε είναι Cauchy κατά μέτρο. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο. Τότε,

$$\int_X |\chi_{E_n} - \chi_{E_m}|\, d\mu = \mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| = 1\}) = \mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \geq 1\}) \to 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.
(γ) Έστω ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε: για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, n \geq n_0$,

$$|\chi_{E_n}(x) - \chi_{E_m}(x)| < \varepsilon \text{ αν } x \notin A.$$

Αφού $\varepsilon < 1$, αυτό σημαίνει ότι $E_n \triangle E_m \subseteq A$, άρα

$$\int_X |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|\, d\mu \leq \mu(A) < \delta.$$

Το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, άρα η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρήστε την ακολουθία $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [0,1/2)$, $E_3 = [1/2,1)$, $E_4 = [0,1/3)$, $E_5 = [1/3,2/3)$, $E_6 = [2/3,1)$ κλπ. Τότε, η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αλλά δεν είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα (θα συνέκλινε σχεδόν ομοιόμορφα, ενώ η $\{\chi_{E_n}(x)\}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x\in[0,1)$).

3. Θέτουμε $J:=\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$. Υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$J=\lim_{n\to\infty}\int_X f_{k_n}\,d\mu.$$

Έχουμε $f_{k_n}\to f$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ ώστε $f_{l_{k_n}}\to f$ σχεδόν παντού. Από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_X f\,d\mu\leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_{l_{k_n}}\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_{l_{k_n}}\,d\mu=J.$$

4. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon>0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$(*)\qquad \left|\int_X (f_{k_n}-f)\,d\mu\right|\geq\varepsilon\quad\text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Αφού $f_n\to f$ κατά μέτρο, έχουμε $f_{k_n}\to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ με $f_{l_{k_n}}\to f$ σχεδόν παντού. Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη και $f_{l_{k_n}}\to f$ σχεδόν παντού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: παίρνουμε

$$\int_X (f_{l_{k_n}}-f)\,d\mu\to 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω της $(*)$.

5. (α) Ορίζουμε $A_k=\{x\in X:\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|\leq k\}$. Τότε, $A_k\subseteq A_{k+1}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, και η υπόθεση εξασφαλίζει ότι $A_k\nearrow X\setminus Z$, όπου $\mu(Z)=0$. Άρα, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)=\mu(X)$.

Έστω $\delta>0$. Αφού $\mu(X)<\infty$, μπορούμε να γράψουμε $\mu(X\setminus A_k)=\mu(X)-\mu(A_k)\to 0$. Άρα, υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\mu(X\setminus A_{k_0})<\delta$. Θέτουμε $A=X\setminus A_{k_0}$ και $M=k_0$. Τότε, $\mu(A)<\delta$ και $|f_n(x)|\leq M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in X\setminus A$.

(β) Αφού $\mu(X)<\infty$, για να δείξουμε ότι $f_ng_n\to fg$ κατά μέτρο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $\{f_ng_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην fg μ-σχεδόν παντού (θυμηθείτε ότι οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες όταν $\mu(X)<\infty$).

Θεωρούμε την $\{f_{k_n}g_{k_n}\}$. Τότε, $f_{k_n}\to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Ομοίως, $g_{l_{k_n}}\to g$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{g_{s_{l_{k_n}}}\}$ της $\{g_{l_{k_n}}\}$ η οποία συγκλίνει στην g σχεδόν παντού. Τότε, $f_{s_{l_{k_n}}}g_{s_{l_{k_n}}}\to fg$ σχεδόν παντού. Έπεται το ζητούμενο.

6. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{k=n}^\infty E_k(\varepsilon))=0$. Αφού $\mu(X)<\infty$, αυτό σημαίνει ότι $\mu(\limsup_n E_n(\varepsilon))=0$ για κάθε $\varepsilon>0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$Z=\bigcup_{s=1}^\infty \limsup_n E_n(1/s).$$

Τότε, $\mu(Z)=0$. Θα δείξουμε ότι, αν $x\in A=X\setminus Z$ τότε $f_n(x)\to f(x)$. Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $s\in\mathbb{N}$ ώστε $1/s<\varepsilon$. Αφού $x\notin\limsup_n E_n(1/s)$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: αν $n\geq n_0$, τότε $x\notin E_n(1/s)$. Δηλαδή, για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{s}<\varepsilon.$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n\to f$ στο $A=X\setminus Z$, όπου $\mu(Z)=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Αν $x\in A$, τότε τελικά ισχύει $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Δηλαδή, $\limsup_n E_n(\varepsilon)\subseteq Z$. Άρα,

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{k=n}^\infty E_k(\varepsilon))=\mu(\limsup_n E_n(\varepsilon))\leq\mu(Z)=0.$$

7. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \to f$ κατά μέσο. Από την ανισότητα του Chebyshev βλέπουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\int_X |f_n - f|\, d\mu < \varepsilon/2$. Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon/2$ και $\left|\int_A f_n\, d\mu\right| < \varepsilon/2$ για κάθε $n < n_0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ έχουμε

$$\left|\int_A f_n\, d\mu\right| \leq \int_A |f_n - f|\, d\mu + \left|\int_A f\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu + \left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα, οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon$ και $\left|\int_A f_n\, d\mu\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu + \int_{\{|f-f_n| < \varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu \\
&\leq \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&\leq \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f|\, d\mu + \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f_n|\, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&< 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&= (2 + \mu(X))\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\int_X |f - f_n|\, d\mu \to 0$.

8. ($\Longrightarrow$) Ισχύει. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\left|\int_A f_n\, d\mu - \int_A f\, d\mu\right| = \left|\int_A (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_A |f_n - f|\, d\mu \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu.$$

Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, απ' όπου έπεται ότι $\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu$.

($\Longleftarrow$) Δεν ισχύει. Πάρτε $X = [0, 2\pi]$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n(x) = \sin(nx)$. Ελέγξτε ότι

$$\int_A f_n\, d\mu \to 0$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subset [0, 2\pi]$: ξεκινήστε από την περίπτωση που το A είναι υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$ και προσεγγίστε το τυχόν μετρήσιμο $A \subseteq [0, 2\pi]$ με πεπερασμένες ενώσεις ξένων διαστημάτων.

Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\int_{[0,2\pi]} |f_n|\, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} |\sin(nx)|\, d\lambda = 4$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.