511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10

1. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

2. (α) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $\cup_{n=m}^{\infty} A_n \supseteq A_m$, άρα

$$\lambda_k\left(\cup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \geq \lambda_k(A_n) \geq c.$$

Αν θέσουμε $E_m = \cup_{n=m}^{\infty} A_n$, τότε $E_m \searrow \limsup A_n$ και $\lambda_k(E_1) \leq \lambda_k(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda_k(\limsup A_n) = \lim_{m\to\infty} \lambda_k(E_m) \geq c > 0.$$

(β) Αφού $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

3. Αφού η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_Z f\,d\lambda = 0 \quad \text{αν } Z \subset [a,b] \text{ με } \lambda(Z) = 0.$$

Από την υπόθεση έπεται ότι αν $a \leq c < d \leq b$ τότε

$$\int_{[c,d]} f\,d\lambda = \int_{[a,d]} f\,d\lambda - \int_{[a,c]} f\,d\lambda = 0.$$

Έστω $G \subset [a,b]$ ανοικτό. Τότε, το G γράφεται στη μορφή $G = \cup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n]$ με τα $[c_n, d_n]$ μη επικαλυπτόμενα. Συνεπώς (εξηγήστε γιατί, θεωρώντας τις f^+ και f^-),

$$\int_G f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[c_n,d_n]} f\,d\lambda = 0.$$

Αν H είναι ένα G_δ υποσύνολο του $[a,b]$, τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}$ ανοικτών υποσυνόλων του $[a,b]$ ώστε $H = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $f\chi_H = \lim\limits_{n\to\infty} (f\chi_{G_n})$ και $|f\chi_{G_n}| \leq |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$0 = \int_{G_n} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} f\chi_{G_n}\,d\lambda \to \int_{[a,b]} f\chi_H\,d\lambda = \int_H f\,d\lambda.$$

Τέλος, αν E είναι τυχόν μετρήσιμο υποσύνολο του $[a,b]$, μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή $E = H \setminus Z$ όπου H είναι G_δ υποσύνολο του $[a,b]$ και Z ξένο προς το E, με $\lambda(Z) = 0$. Τότε,

$$\int_E f\,d\lambda = \int_H f\,d\lambda - \int_Z f\,d\lambda = 0 - 0 = 0.$$

Αφού $\int_E f\,d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [a,b]$, συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$ (αρκεί να θεωρήσουμε τα $E_1 = \{f > 0\}$ και $E_2 = \{f < 0\}$).

4. Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geq \lambda\left(\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m, και συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_N$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^N \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^N \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\,d\lambda \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leq i\leq N} \lambda(E_i) \geq \frac{k}{N}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{N}$.

6. Έστω $\alpha > 0$. Αφού η f είναι γνησίως θετική, αν θέσουμε $E_m = \{f > 1/m\}$ τότε $E_m \nearrow E$. Συνεπώς,

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_k(E_m) = \lambda_k(E) < \infty.$$

Υπάρχει λοιπόν $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda_k(E) - \lambda_k(E_m) < \frac{\alpha}{2}.$$

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\lambda_k(A) > \alpha$. Τότε,

$$\lambda_k(A \cap E_m) + \lambda_k(A \cap (E \setminus E_m)) = \lambda_k(A) > \alpha,$$

άρα

$$\lambda_k(A \cap E_m) > \alpha - \lambda_k(A \cap (E \setminus E_m)) \geq \alpha - \lambda_k(E \setminus E_m) > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_A f\,d\lambda_k \geq \int_{A\cap E_m} f\,d\lambda_k \geq \frac{1}{m} \cdot \lambda_k(A \cap E_m) \geq \frac{\alpha}{2m}.$$

Άρα, το ζητούμενο ισχύει με $\delta = \alpha/(2m)$.

7. Η $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$ είναι μετρήσιμη, και

$$\int_{[0,1]} |f_n| = |\alpha_n| \left(\int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{q_n - x}} + \int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x - q_n}} \right) = 2|\alpha_n| \left(\sqrt{q_n} + \sqrt{1-q_n} \right) \leq 4|\alpha_n|.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n| \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty,$$

η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

8. Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο: θέτοντας $y = 1 + n^2x^2$, παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{1}{2n} \int_1^{1+n^2} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \to 0.$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\, dx = \sqrt{n} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{\ln(1+n^2)}{2\sqrt{n}} \to 0.$$