Λογισμός Πινάκων

Εαρινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών
Δημητροκάλλης Βασίλης
ΑΜ:1900046
Επιβλ. Καθηγήτρια: Μ. Μητρούλη

1 Θεωρητική Επεξεργασία

Ερώτημα 1^o: Να καταγραφούν και και να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τους *spd* πίνακες

Απάντηση:

Ως πίνακες *spd* ονομάζουμε τους συμμετρικά θετικά ορισμένους πίνακες. Επομένως οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν έναν τέτοιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι οι ακόλουθες:

1. Το μέγιστό (κατά απόλυτη τιμή) στοιχείο του A βρίσκεται στην διαγώνιο του
2. Όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και μάλιστα θετικές
3. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδοτιμές του είναι ορθογώνια
4. Είναι διαγωνοποιήσιμος
5. Είναι αντιστρέψιμος
6. Ο A^{-1} είναι θετικά ορισμένος
7. Κάθε κύριος υποπίνακας του Α είναι θετικά ορισμένος
8. (Κριτήριο Sylvester) Ένας συμμετρικός (ερμιτιανός) πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν κάθε κύρια υποορίζουσα του είναι θετική.
9. (Παραγοντοποίηση *Cholesky*) Υπάρχει ένας μοναδικός άνω τριγωνικός πίνακας $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με θετικά διαγώνια στοιχεία έτσι ώστε:
$$A = G^T G$$

Πράγματι

1. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε: $x^T Ax = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$. Επειδή A θετικά ορισμένος $x^T Ax > 0$. Έστω προς άτοπο ότι το μέγιστο στοιχείο του A βρίσκεται στην θέση i, j με $i < j$ και είναι το a_{ij}.Τότε αν $x = (0, \dots, 1, 0, \dots, -1, 0, \dots)$, $x_i = 1$, $x_j = -1$:
$$x^T Ax = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} < 0 \textbf{ άτοπο}$$
2. Έστω ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = A^T$ έχει μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα x ως αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ. Τότε:
$$\begin{aligned} x^T A^T = (Ax)^T &= \bar{\lambda}x^T \\ \Leftrightarrow x^T A^T x &= \bar{\lambda}x^T x \\ \Leftrightarrow x^T(Ax) &= \bar{\lambda}x^T x \\ \Leftrightarrow x^T \lambda x &= \bar{\lambda}x^T x \\ \Leftrightarrow \lambda x^T x &= \bar{\lambda}x^T x \\ \Leftrightarrow (\lambda - \bar{\lambda})x^T x = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} &= \lambda, \quad \text{αφού} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Επομένως κάθε ιδιοτιμή λ του A είναι πραγματική Ας δείξουμε τώρα ότι είναι και θετική. Επειδή ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος έχουμε:

$$\begin{aligned} & x^T A x > 0 \\ \Leftrightarrow & x^T \lambda x > 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda x^T x > 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda \|x\|^2 > 0 \\ \xLeftrightarrow[\|x\|^2 \geq 0]{} & \lambda > 0 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: η απόδειξη γίνεται αμφίδρομα δηλ: ο πίνακας A είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ έχει θετικές ιδιοτιμές

3. Έστω τώρα μια επιπλέον ιδιοτιμή $\kappa \neq \lambda$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $y \neq 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$x^T y = 0$$
Παρατηρούμε ότι:
$$\begin{aligned} & (Ax)^T = (\lambda x)^T \quad \text{και} \quad (Ay)^T = (\kappa y)^T \\ \Leftrightarrow\ & x^T A^T = \bar{\lambda} x^T \quad \text{και} \quad y^T A^T = \bar{\kappa} y^T \\ \Leftrightarrow\ & x^T A = \lambda x^T \quad \text{και} \quad y^T A = \kappa y^T \end{aligned}$$
Αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά την ποσότητα $x^T A$ με y παίρνουμε
$$\begin{aligned} & x^T A y = x^T (Ay) = x^T \kappa y = \kappa x^T y \\ \xRightarrow[x^T y \text{ βαθμωτό}]{} & (x^T A y) = (x^T A y)^T = y^T A x = y^T \lambda x = \lambda x y^T \\ \Rightarrow\ & \lambda x y^T = \kappa x^T y \Rightarrow \lambda x y^T - \kappa x^T y = 0 \\ \xRightarrow[x y^T = x^T y = v \in \mathbb{R}^\star]{} & (\lambda - \kappa) v = 0 \\ \Rightarrow\ & v = 0 \\ \Rightarrow\ & x^T y = 0 \end{aligned}$$

4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι k διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A με αλγεβρική πολλαπλότητα $m_i,\ i = 1, 2, \ldots k$ αντίστοιχα.

   Αφού λ_1 ιδιοτιμή του A, υπάρχει μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα v τέτοιο ώστε: $Av = \lambda_1 v$. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από το v και W ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετα στο v. Τότε: $\mathbb{R}^n = V \oplus W$

   Έστω $w \in W \Rightarrow v \cdot w = 0,\ v^T A w = (Av)^T w = \lambda v^T w = 0 \Rightarrow Aw \in W$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τον πίνακα A ως πίνακα γραμμικής απεικόνισης $f : W \to W$ περιορισμένο στον W. Έτσι η λ_1 είναι ιδιοτιμή του "περιορισμένου" πίνακα με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$v_2 \in W$. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο επιχείρημα παίρνοντας ως $V = \{v_1, v_2\}$ και W τον χώρο που παράγεται από τα κάθετα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ στα v_1, v_2. Σε m_1 βήματα θα λάβουμε ακριβώς m_1 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1. Επομένως σε $n = m_1 + m_2 + \ldots m_k$ βήματα θα λάβουμε n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που παράγουν μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε:

$$A = Pdiag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}P^{-1}$$

Παρατήρηση: Στην απόδειξη των προηγούμενων ιδιοτήτων δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Οι ιδιότητες 2 και 3 ισχύουν για όλους τους συμμετρικούς πίνακες, όχι μονάχα για τους *spd*

5. Είδαμε πριν ότι ο πίνακας A έχει θετικές ιδιοτιμές $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Από το φασματικό θεώρημα η ορίζουσα του πίνακα θα ειναι:

$$detA = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \gneq 0 \ \text{ Άρα ο πίνακας αντιστρέφεται}$$

Παρατήρηση: Ταυτόχρονα αποδείξαμε ότι η ορίζουσα ενός *spd* πίνακα είναι θετική

6. Αν ο A έχει θετικές διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,\ \ k =\in \mathbb{Z}_{\leq n}$ τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} θα είναι $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1},\ \ k =\in \mathbb{Z}_{\leq n}$ που είναι επίσης θετικές. Άρα από την ιδιότητα 1 ο A^{-1} είναι θετικά ορισμένος.

7. Έστω $A^{(k)}$ ο $k-$οστός κύριος υποπίνακας του A (δηλαδή ο $k \times k$ πίνακας που προκύπτει από τον A αν αφαιρέσουμε τις $n - k$ τελευταίες γραμμές και στήλες). Αφού Α συμμετρικός τότε προφανώς ο $A^{(k)}$ θα είναι επίσης συμμετρικός. Μένει να δείξουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Ο πίνακας A γράφεται σε *block* μορφή ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(k)} & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\text{Έστω } y \in \mathbb{R}^k \text{ τ.ω } y \neq 0_k. \text{ Θέτουμε } x = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Το διάνυσμα x είναι μη μηδενικό και επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & x^T A x > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A^{(k)} & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} > 0 \\ \Leftrightarrow & y^T A^{(k)} y > 0 \end{aligned}$$

Επομένως ο $A^{(k)}$ είναι *spd*

8. $\Rightarrow$: Άμεσο από τις ιδιότητες 7 και 5.
$\Leftarrow$: Μιας και οι ερμιατιανοί πίνακες είναι οι συμμετρικοί πίνακες του $\mathbb{C}^{n\times n}$ άρα υπερσύνολο των πραγματικών συμμετρικών αρκεί να αποδείξουμε ότι:

Αν κάθε κύρια υποορίζουσα ενός ερμιτιανού πίνακα είναι θετική $\Rightarrow$ ο πίνακας είναι spd.

Θα το δείξουμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ η απόδειξη είναι τετριμένη. Έστω $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι όλες οι κύριες υποορίζουσες του συμμετρικού πίνακα A είναι θετικές και $det(A) > 0$. Αν ο ερμιτιανός $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A & v \\ v^\star & d \end{pmatrix}$ δεν είναι θετικά ορισμένος τότε θα έχει τουλάχιστον δυο αρνητικές ιδιοτιμές. Αφού ο A_{n+1} ερμιτιανός υπάρχουν δυο ορθογώνια ιδιοδιανύσματα x, y που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές. Έστω $u = ax + by \neq 0$ τ.ω η τελευταία συντεταγμένη του u να είναι 0. Τότε:

$$u^\star A_{n+1} u = |a|^2 x^\star A x + |b|^2 y^\star A y < 0$$

Δηλαδή ο A όχι θετικά ορισμένος. άτοπο επομένως ο A_{n+1} θετικά ορισμένος

9. Θα δείξουμε την ύπαρξη με επαγωγή. Έστω ότι υπάρχει τέτοια παραγοντοποίηση για πίνακες $(n-1) \times (n-1)$. Τότε ο πίνακας A γράφεται:

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & c \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}^{n-1}$$
$$A_{n-1} = G_{n-1}^T G_{n-1}, \quad G_{n-1} \text{ μοναδικός,}$$

Αρκεί να βρω $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $A = G^T G$. Ορίζουμε τον πίνακα G ως εξής:

$$G = \begin{pmatrix} G_{n-1} & b \\ 0^T & \sqrt{k} \end{pmatrix}, \quad b = (G_{n-1}^T)^{-1}, \quad k = a_{nn} - b^T$$

Τότε $k = a_{nn} - c^T A_{n-1}^{-1} c > 0$ και

$$G^T G = \begin{pmatrix} G_{n-1}^T & 0 \\ b^T & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n-1} & b \\ 0^T & \sqrt{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n-1}^T G_{n-1} & G_{n-1}^T b \\ b^T G_{n-1} & bb^T + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & c \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Για την μοναδικότητα αφού $G = \begin{pmatrix} G_{n-1} & b \\ 0^T & \sqrt{k} \end{pmatrix}$, $G^T G = \begin{pmatrix} A_{n-1} & c \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ παίρνουμε εξισώνοντας τα πρώτα στοιχεία ότι $A_{n-1} = G_{n-1}^T G_{n-1}$, όπου G_{n-1} μοναδικός. Επίσης έχουμε:

$$G_{n-1}^T b = c, \quad b^T b + k = a_{nn}$$

Συνεπώς b, k μοναδικά. Επομένως ο πίνακας G είναι μοναδικός!

Ερώτημα 2^o:Επιπρόσθετα να αποδειχθεί ότι:

Εάν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και D_k είναι η πάνω αριστερή $k \times k$ κύρια υποορίζουσα τότε:

1. Τα οδηγά στοιχεία p_k στην απαλοιφή $Gauss$ ισούται με τα πηλίκα των κυρίων οριζουσών, συγκεκριμένα

$$p_k = \frac{D_k}{D_{k-1}}$$

2. Εάν εφαρμοστεί απαλοιφή $Gauss$ σε πίνακα spd τα οδηγά στοιχεία είναι πάντα θετικά

3. Έστω

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τις 3 κύριες υποορίζουσες και συμπεράνετε εάν είναι θετικά ορισμένος. Επιβεβαιώστε ότι τα πηλίκα τους δίνουν τα οδηγά στοιχεία p_2 και p_3

Απόδειξη:

1. Ας γράψουμε τον πίνακα A στην LU παραγοντοποιημένη του μορφή:

$$A = LU \Rightarrow det(A) = det(L) \cdot det(U)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν γίνει κάποια εναλλαγή γραμμών στον πίνακα A κατα τη διάρκεια της απαλοιφής $Gauss$ τότε η ορίζουσα του δεν θα αλλάξει.

Πράγματι αν R ο πίνακας των απαραίτητων μεταθέσεων τότε έχουμε

$$PA = LU \Rightarrow det(P)det(A) = det(L)det(U) \xRightarrow[det(P)=\pm 1]{} det(A) = \pm det(L)det(U)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι δεν χρειάζεται κάποια εναλλαγή γραμμών.

Ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός και όλα τα διαγώνια στοιχεία του ισούνται με 1. Ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία τα οδηγά στοιχεία του Α από την απαλοιφή $Gauss$ (έστω: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$) Επομένως

$$det(A) = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i$$

$$\Rightarrow det(A) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Προφανώς αν $A^{(k)}$ ο $k-$οστός κύριος υποπίνακας του A τότε τα πρώτα k οδηγά στοιχεία ορίζονται πλήρως από αυτόν. Μάλιστα θα έχουμε:

$$A^{(k)} = L^{(k)}U^{(k)}$$

$$\Rightarrow det(A^{(k)}) = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

$$\Leftrightarrow D_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

Για $k-1$:

$$D_{k-1} = \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

Διαιρούμε τις δυο τελευταίες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{D_k}{D_{k-1}} &= \frac{\prod_{i=1}^{k} p_i}{\prod i = 1^{k-1} p_i} \\
\Leftrightarrow \frac{D_k}{D_{k-1}} &= \frac{p_1 \cdots p_{k-1} \cdot p_k}{p_1 \cdots p_{k-1}} \\
\Leftrightarrow \frac{D_k}{D_{k-1}} &= p_k
\end{aligned}$$

2. Από την προηγούμενη απόδειξη παίρνουμε ότι το $k-$οστό οδηγό στοιχείο ισούται με: $p_k = \frac{D_k}{D_{k-1}}$, όπου D_k η πάνω αριστερή $k \times k$ κύρια υποορίζουσα του πίνακα A.

   Αρκεί να δείξουμε ότι $D_k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$

   Από την ιδιότητα 7 έχουμε ότι οι υποπίνακες $A^{(k)}, A^{(k-1)}$ είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι. Στην απόδειξη της ιδιότητας 5 είδαμε πως η ορίζουσα κάθε τέτοιου πίνακα είναι θετική. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
&D_k > 0 \ \text{ και } \ D_{k-1} > 0 \\
\Rightarrow &\frac{D_k}{D_{k-1}} > 0 \\
&\Rightarrow p_k > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

3. Για τις ορίζουσες του S:

$$\begin{aligned}
det(S) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 0 \\
\Rightarrow D_3 &= 2 \cdot 31 - 2 \cdot 16 = 30 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 \\
D_1 &= 2
\end{aligned}$$

   εφαρμόζουμε απαλοιφή $Gauss$ στον πίνακα:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ p_3 = 5$$

   Αφού όλες οι κύριες υποορίζουσες του συμμετρικού S, $D_1, D_2, D_3 > 0$ από το κριτήριο Sylvester έπεται ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.
   Όπως περιμέναμε $p_2 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{D_2}{D_1}$ και $p_3 = 5 = \frac{30}{6} = \frac{D_3}{D_2}$