Μια γρήγορη και αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα

Παναγιώτης Μανιατάκος[1]

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

E. Bizas, M. Mitrouli, O. Turec, Efficient estimates for matrix-inverse quadratic forms, Applied Numerical Mathematics, https:// doi.org/10.1016/j.apnum.2024.01.013

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Νοέμβριος 2024

Η ανισότητα Cauchy - Schwarz

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας (spd) και έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
|(x, Ax)| \leq \|x\| \cdot \|Ax\| &\Rightarrow (x, Ax)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|Ax\|^2 \\
&\Rightarrow (x^T Ax)^2 \leq \|x\|^2 \cdot (x^T A^2 x) \\
&\Rightarrow 1 \leq \frac{\|x\|^2 \cdot (x^T A^2 x)}{(x^T Ax)^2}
\end{aligned}$$

Δείκτης προσέγγισης

Definition

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας και $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Η ποσότητα:

$$\rho(x) = \frac{\|x\|^2(x^T A^2 x)}{(x^T A x)^2}$$

λέγεται *δείκτης προσσέγγισης*.

Το $\rho(x)$ ως μέτρο σύγκρισης

→ Ο δείκτης προσέγγισης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εύκολο υπολογίσιμο μέτρο εγγύτητας του διανύσματος x σε σχέση με ένα ιδιοδιάνυσμα του A, σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα

Lemma

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας και έστω $x \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε ισχύει ότι $\rho(x) \geq 1$, και $\rho(x) = 1$ αν και μόνο αν το x είναι ενα ιδιοδιάνυσμα του A.

Απόδειξη Λήμματος

Η ανισότητα $\rho(x) \geq 1$ προκύπτει από την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Επιπρόσθετα, έχουμε;

$$\rho(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|x\|^2 \cdot \|Ax\|^2}{(x^T Ax)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^T Ax| = \|x\| \cdot \|Ax\|.$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz ισχύει ότι , $|x^T Ax| = \|x\| \cdot \|Ax\|$ αν και μόνο αν τα διανύσματα x και Ax είναι γραμμικώς εξαρτημένα, σε αυτό το παράδειγμα, $Ax = \lambda x$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\rho(x) = 1$ αν και μόνο αν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A. $\square$

Ιδιότητες του $\rho(x)$

Lemma

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας και έστω $x \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα . Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- $\rho(x) = 1$;
- $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) = 1$;
- $\rho(A^k x) = 1$ *για κάθε* $k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1, $\rho(x) = 1$ αν και μόνο αν το x είναι ενα ιδιοδιάνυσμα του A. Αυτό είναι περαιτέρω ισοδύναμο με ότι το $A^{-\frac{1}{2}}x$ και το $A^k x$ είναι ιδιοδιάνυσματα του A, και επομένως αφού $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) = 1$ τότε και $\rho(A^k x) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$. $\square$

Η ποσότητα $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$

→ Με την ακόλουθη πρόταση, μπορούμε να εκφράσουμε μια τετραγωνική μορφή ως συνάρτηση του δείκτη προσέγγισης:

Proposition

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας πίνακας spd και $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Ισχύει ότι

$$x^T A^{-1} x = \frac{\|x\|^4}{x^T A x}\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$$

→→ Έτσι, προσδιορίζοντας μια κατάλληλη προσέγγιση του $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$, είναι δυνατό να προκύψει ένας τύπος που να εκτιμά την τετραγωνική μορφή: $x^T A^{-1} x$.

Απόδειξη πρότασης

Υπολογίζοντας την ποσότητα $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$, έχουμε ότι:

$$\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) = \frac{\|A^{-\frac{1}{2}}x\|^2 \cdot \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2}{((A^{-\frac{1}{2}}x)^T A^{\frac{1}{2}}x)^2}$$

$$\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) = \frac{((A^{-\frac{1}{2}}x)^T A^{-\frac{1}{2}}x)((A^{\frac{1}{2}}x)^T A^{\frac{1}{2}}x)}{(x^T x)^2}$$

$$\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) = \frac{(x^T A^{-1}x)(x^T Ax)}{\|x\|^4}$$

□

Τρόπος προσέγγισης (Heuristic Method)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας spd πίνακας, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Μια πρόσεγγιση της ποσότητας $\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$ μπορεί να γίνει με την έκφραση που ακολουθεί:

$$\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) \approx \rho(x)^{1+\kappa}\rho(A^{\frac{1}{2}}x)^{-\kappa}$$

Για κ=0 από την έκφραση αυτή προκύπτει η εξής προσέγγιση:

$$\rho(A^{-\frac{1}{2}}x) \approx \rho(x)$$

Υπενθύμιση: Από την πρόταση που είδαμε παραπάνω ισχύει ο ακριβής τύπος:

$$x^T A^{-1} x = \frac{\|x\|^4}{x^T A x}\rho(A^{-\frac{1}{2}}x)$$

Τρόπος προσέγγισης

Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω μπορούμε να κάνουμε την εξής προσέγγιση:

$$x^T A^{-1} x \approx \frac{\|x\|^4}{x^T A x} \rho(x)$$

Το $\rho(x)$ το έχουμε ορίσει, επόμενως έχουμε:

$$x^T A^{-1} x \approx \frac{\|x\|^4}{x^T A x} \frac{\|x\|^2 (x^T A^2 x)}{(x^T A x)^2}$$

Άρα προκύπτει ο τύπος $hest1$: :

$$(x, A^{-1}x) \approx \frac{\|x\|^6 \cdot \|Ax\|^2}{(x, Ax)^3}$$

Μετασχηματισμός του τύπου και υπολογιστική πολυπλοκότητα

Εφαρμόζοντας κάποιους μετασχηματισμός στον παραπάνω τύπο για να ρίξουμε την πολυπλοκότητα προκύπτει ότι $hest1$:

$$\frac{(x,x)^3}{(x,Ax)^3} \cdot (Ax, Ax)$$

Με βάση αυτόν τον τύπο λοιπόν υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα $\hookrightarrow$ Υποθέτοντας ότι:

- πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις, τετραγωνικές ρίζες $\rightarrow \mathcal{O}(1)$

Προκύπτει ότι:

mvp's	ip's	COMPLEXITY
1	3	$n^2 + 3n + \mathcal{O}(1)$

Ο πίνακας Kac-Murdock-Szegö (KMS) A διάστασης n είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και Toeplitz. Τα στοιχεία αυτού του πίνακα δίνονται από τον τύπο:

$$A_{ij} = 0.2^{|i-j|}, i, j = 1, 2, ..., n$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι ίσα με το 1.

Dimension	Relative Error	Time (sec.)
3000	0.017356	0.003003
5000	0.021829	0.009783

Table: Προσέγγιση τετραγωνικής μορφής πινάκων KMS

Example 2 — — Covariance Matrix

Ο πίνακας συνδιακύμανσης (Covariance Matrix) A διάστασης n είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τα στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης ορίζονται ως εξής:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 + i^a & \text{if } i = j \\ \dfrac{1}{|i-j|^b} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$i = 1, 2, ..., n$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \geq 1$.

Dimension	Relative Error	Time (sec.)
5000	$\mathcal{O}(10^{-6})$	0.01011
10000	$\mathcal{O}(10^{-5})$	1.12158

Table: Προσέγγιση της διαγωνίου του αντιστρόφου πινάκων συνδιακύμανσης

Example 3 — — Random Matrix

Μια γρήγορη και αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα

Τρόπος προσέγγισης-Heuristic method

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της προσέγγισης

Αριθμητική Υλοποίηση

Με κατάλληλο αλγόριθμο παράγουμε τυχαίους πίνακες με τις κατάλληλες ιδιότητες ώστε να είναι θετικά συμμετρικά ορισμένοι και εφαρμόζουμε τον hest1 για διάφορες διαστάσεις τους:

Dimension	Relative Error	Time (sec.)
2500	0.271682	0.969448
5000	0.596046	7.203326
7500	0.581279	22.83599

Table: Προσέγγιση της διαγωνίου του αντιστρόφου τυχαίων πινάκων spd

Σας ευχαριστώ!