

8-1-2025

Υποθέσεις Παγινδρόμησης

$$Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Δαγμα

x	y
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$$Y_j = b_0 + b_1 x_j + \varepsilon_j, \quad j=1, \dots, n$$

① $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\text{Var}(\varepsilon_j) = \sigma^2 = \sigma^2 \omega^2 \rho_{jj}$$

ε' ανεξάρτητων των x

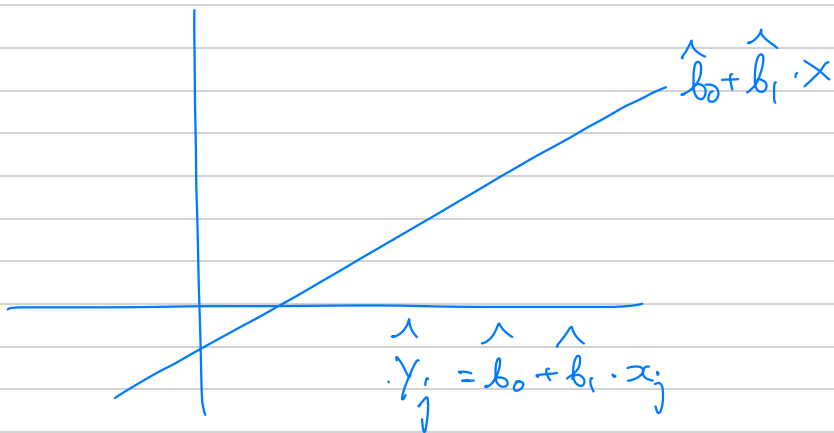
② (αποσκεδαστικότητα)

$\rightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : \text{ανεξάρτητα}$

Εξελίξεις στα τετραγωνικά

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 \Rightarrow \text{εξίσωση παφιδρόμησης}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$$



$\hat{y}_j$ = προβλεπόμενη τιμή από το μοντέλο για την παρατήρηση j

γ_j - празничні дні

$\hat{b}_0, \hat{b}_1$: Ακριβήριο σφαλμάτων (?)
 $\updownarrow$
 $\Delta \cdot E$

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{b}_1) &= b_1 \\ E(\hat{b}_0) &= b_0 \end{aligned} \right\} \text{αμερόμητες}$$

$$\hat{b}_1 \sim N(b_1, \sigma_{\hat{b}_1}^2)$$

$$\hat{b}_0 \sim N(b_0, \sigma_{\hat{b}_0}^2)$$

$\sigma_{\hat{b}_1}^2$: (αγνώστη) διασπορά της $\hat{b}_1$

$S_{\hat{b}_1}^2$: Εκτίμηση της $\sigma_{\hat{b}_1}^2$ (υπολογίζεται από το βιβλίο)

$\sigma_{\hat{b}_0}^2, S_{\hat{b}_0}^2$ αντιστοιχούν

① $\Delta E \quad (1-\alpha)100\%$

$$b_1 : \hat{b}_1 \pm t_{\alpha/2, n-2} S_{\hat{b}_1}$$

$$b_0 : \hat{b}_0 \pm t_{\alpha/2, n-2} S_{\hat{b}_0}$$

υπολογίζεται από software

② Έλεγχος υποθέσεων για b_0, b_1

$$\text{πχ.} \quad H_0 : b_0 = 5, \quad H_1 : b_0 \neq 5 \quad (?)$$

$$H_0 : b_1 \leq 7, \quad H_1 : b_1 > 7 \quad (?)$$

$$H_0: b_1 = 0 \quad : \quad H_1: b_1 \neq 0$$

(Ελέγχος
σημαντικότητας)

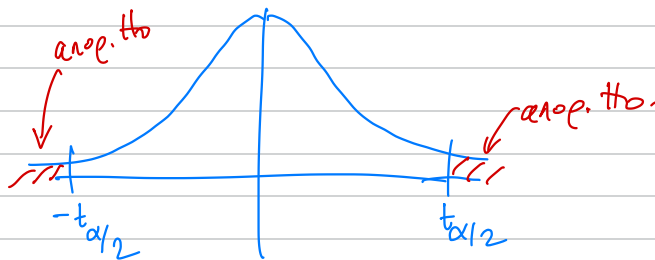
(αν $b_1 = 0 \Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$)

Αν απορριφθεί η H_0 ($\Rightarrow$ υπάρχει ενδειξη ότι $b_1 \neq 0$)

τότε θεωρούμε να μπορεί συνιστά σημαντική

(i) Στατιστικό ελέγχου $t = \frac{\hat{b}_1}{s_{\hat{b}_1}}$

Απορρίπτει H_0 αν $|t| > t_{\alpha/2, n-2}$: κρίνειται según
από t distribution



Ισοδύναμα απορρίπτει H_0 αν p-value $< \alpha$

α : επίπεδο σημαντικότητας : δράση zero I false alarm

β : I ποσοστό ελέγχου " " II

$$\alpha = P(\text{reject } H_0 \mid H_0) :$$

$$\beta = P(\text{accept } H_0 \mid H_1)$$

$$\Delta \in \hat{b}_1 : \hat{b}_1 - t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1} \leq b \leq \hat{b}_1 + t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1}$$

$$\text{Test: reject av } \left| \frac{\hat{b}_1}{\hat{s}_{\hat{b}_1}} \right| > t_{\alpha/2}$$

$$\text{Av accept } H_0 : \Rightarrow \left| \frac{\hat{b}_1}{\hat{s}_{\hat{b}_1}} \right| \leq t_{\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{b}_1}{\hat{s}_{\hat{b}_1}} \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1} \leq \hat{b}_1 \leq t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{b}_1 - t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1} \leq 0 \leq \hat{b}_1 + t_{\alpha/2} \hat{s}_{\hat{b}_1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta \in \hat{b}_1}$

Απορρ. H_0 αν και μιν αν 0 δε περιέχεται
στο διάστημα εμπιστοσύνης
του b_1

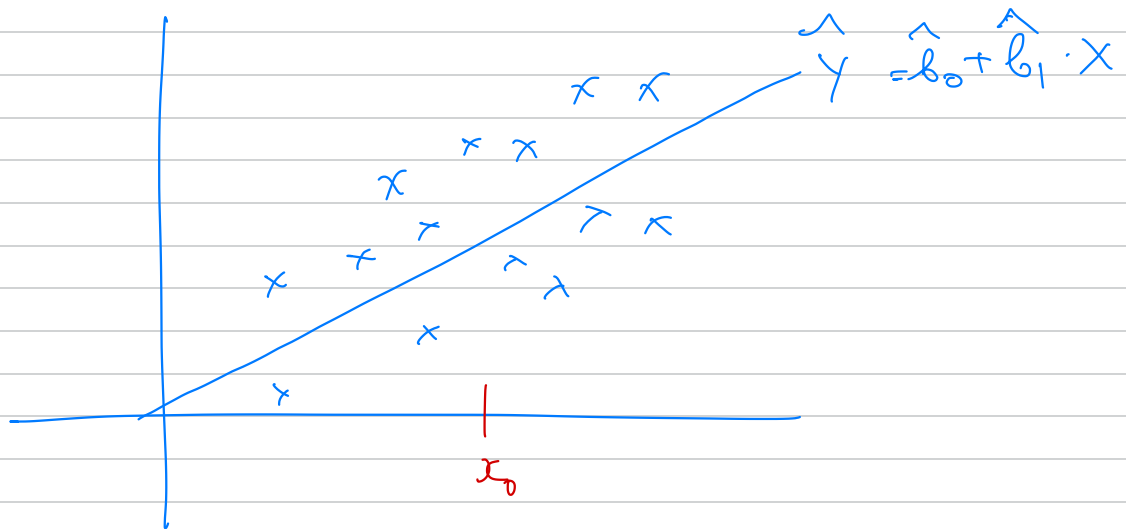
Χρησ των μωρέων για πρόβλεψεις

πχ. $X = \text{ύψος βρέφους}$

$Y = \text{βάρος}$

Έστω ότι ανή ζεύγη $\Rightarrow \hat{b}_0, \hat{b}_1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x}$

Θαυρίμε την απάντηση $x = x_0$ (π.χ. $x_0 = 3 \text{ μίλια}$)



① Για $x = x_0$: Έστω ο πληθυσμιακός μέσος με $x = x_0$

$$Y|X=x_0 \sim N(b_0 + b_1 \cdot x_0, \sigma^2)$$

(?) $\rightarrow \mu(x_0) = E(Y|X=x_0) = \underline{\underline{b_0 + b_1 \cdot x_0}}$

αφώτου ποσότητα

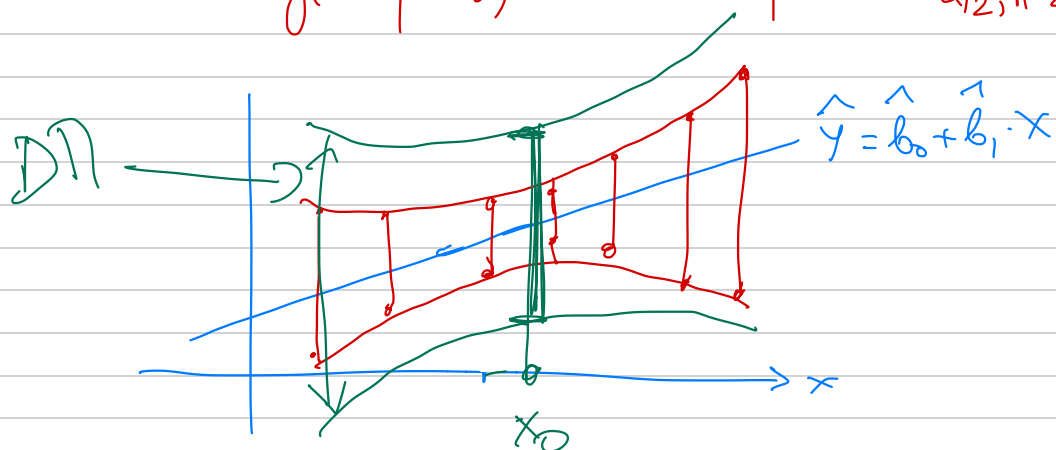
$$\hat{\mu}(x_0) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x_0$$

$$E(\hat{\mu}(x_0)) = b_0 + b_1 \cdot x_0$$

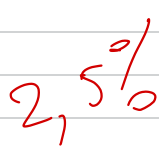
σημ. σφάλμα
εξίσωσης

ΔE για $\mu(x_0)$:

$$\hat{\mu}(x_0) \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot \underbrace{S_{\hat{\mu}(x_0)}}_{\text{σφάλμα}}$$



2



also $\hat{\mu}(x_0)$



$\mu \in \mathcal{M}$ zupai
nfa duofan $X \rightarrow \mathcal{X}$

Διασκέδα πρόβλεψη → για μεμονωμένα
στοιχεία $x = x_0$

$$\Delta T : \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x_0 \pm t_{\alpha/2, n-1} \hat{S}_{pred}$$

$\hat{S}_{pred}$: τυπικό σφάλμα πρόβλεψης