

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/>

Α. Κατάβολος

Εαρινό Εξάμηνο 2024-25

Περιεχόμενα

- 1 Εισαγωγή: Χώροι Τελεστών (Operator Spaces)
- 2 C^* -άλγεβρες
- 3 Μεταθετικές C^* -άλγεβρες
 - Ο συναρτησιακός λογισμός
- 4 Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας
- 5 Θετικές γραμμικές μορφές
 - Αναπαραστάσεις μεταθετικών C^* αλγεβρων
- 6 Η Αναπαράσταση GNS
- 7 Ευθέα αθροίσματα
- 8 Η καθολική αναπαράσταση
- 9 Απεικονίσεις μεταξύ χώρων τελεστών
- 10 Stinespring's Theorem: Operator-valued GNS
 - Αναπαράσταση Choi - Kraus
- 11 Επέκταση θετικών απεικονίσεων
- 12 Το Φασματικό Θεώρημα
- 13 Μέτρα με τιμές θετικούς τελεστές, Φασματικό Θεώρημα, Θεώρημα Διαστολής Naimark

Χωροι Banach

$\pi\chi$

$$\ell_n^\infty(\mathbb{C}) \ni \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

νορμα:

$$\|\vec{x}\|_\infty := \sup_i |x_i|$$

Χωροι Τελεστων

$\pi\chi$

$$M_n(\mathbb{C}) \ni x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

νορμα:

$$\begin{aligned} \|[x_{ij}]\| &:= \sup\{\|x\xi\|_2 : \xi \in \text{ball}(\ell_n^2)\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum a_i x_{ij} b_j\right| : \sum |a_i|^2 = \sum |b_j|^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

- $(E, \|\cdot\|)$ **χωρος με νορμα**: $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}$
(N1) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)
για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Επαγει μετρικη. Αν $(E, \|\cdot\|)$ είναι χωρος με νορμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

- **Χωρος Banach**: $(E, \|\cdot\|)$ πληρης ως προς την επαγομενη μετρικη.
Πρδγ.

$$\ell_\Gamma^\infty = \ell_\Gamma^\infty(\mathbb{C}) := \{x : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ φργμ.}\}, \|x\|_\infty := \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}.$$

- **Ο δυικος** ενός χωρου με νορμα $(E, \|\cdot\|_E)$ είναι παντα χωρος Banach με τη νορμα τελεστη:

$$E^* := \{f : E \rightarrow \mathbb{K} : \text{γραμμικη και συνεχης}\}$$

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \text{ball}(E)\}$$

Καθε χώρος με νορμα «ειναι» χώρος συναρτησεων

Πρόταση

Αν $(E, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νορμα, υπάρχει συνολο Γ και γραμμικη *ισομετρια* $\phi : E \rightarrow \ell_\Gamma^\infty$.

Οχι μοναδικα!

Άσκηση

Για τον $E = \ell_n^1(\mathbb{R})$ βρειτε καταλληλη $\phi : E \rightarrow \ell_\Gamma^\infty$. Επιλεξτε «μικρο» Γ .
Ιδια ερωτηση για τον $E = \ell_n^1(\mathbb{C})$. Συγκρινετε τα συνολα Γ στις δυο περιπτωσεις.

- Εσωτερικο γινόμενο: $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ με

$$(i) \quad (x_1 + \lambda x_2, y) = (x_1, y) + \lambda (x_2, y)$$

$$(ii) \quad \overline{(x, y)} = (y, x)$$

$$(iii) \quad (x, x) \geq 0$$

$$(iv) \quad (x, x) = 0 \iff x = 0$$

για καθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Επαγει νορμα: $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ (Cauchy-Schwarz)!

- Χωρος Hilbert:** $(E, (\cdot, \cdot))$ και πληρης ως προς τη μετρικη που επαγει το $(\cdot, \cdot)$.

Το ευθυ αθροισμα $\bigoplus_{k=1}^n E_k$ χωρων με εσωτ. γινόμενο $(E_k, (\cdot, \cdot)_k)$ εφοδιαζεται με πραξεις κατα συντεταγμενη και

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{k=1}^n (x_k, y_k)_k \quad \text{αρα} \quad \|\vec{x}\| := \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^2 \right)^{1/2}.$$

$$M_n(\mathcal{B}(H)) \simeq \mathcal{B}(H^n)$$

Καθε $n \times n$ πίνακας $[a_{ij}]$ τελεστών $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει φραγμένο
 (Ασκηση) τελεστή A στον H^n (όπου $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$) μεσω
 πολλ/σμου πίνακων:

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}(\xi_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}(\xi_j) \end{bmatrix}.$$

Ετσι επαγεται νορμα στον χωρο $M_n(\mathcal{B}(H))$

$$\|A\| = \sup\{\|A\vec{\xi}\| : \vec{\xi} \in \text{ball } H^n\}.$$

Ειδικότερα επαγεται νορμα στον $M_n(\mathbb{C})$.

Αντιστροφα καθε $A \in \mathcal{B}(H^n)$ επαγει εναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$
 τελεστών $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ (Ασκηση).

Αλγεβρική δομή του $M_n(\mathbb{E})$

Αν E είναι $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(E)$ είναι όχι μόνον $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος, δηλ. $\mathbb{K}$ -προτυπο (πραξεις κατα συντεταγμενη) αλλά και $M_n(\mathbb{K})$ -διπροτυπο με πραξεις

$$M_n(\mathbb{K}) \times M_n(E) \rightarrow M_n(E) : (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

$$\text{οπου } \alpha \cdot x = [y_{ij}] \text{ με } y_{ij} := \sum_k \alpha_{ik} x_{kj}$$

$$M_n(E) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(E) : (x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$$

$$\text{οπου } x \cdot \alpha = [z_{ij}] \text{ με } z_{ij} := \sum_k x_{ik} \alpha_{kj}.$$

Χώροι Τελεστών (Operator Spaces)

Ένας **χώρος τελεστών** $\mathcal{X}$ (Quantized or non-commutative Banach space) είναι ένας (συνήθως κλειστός) υπόχωρος του χώρου $\mathcal{B}(H)$ των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε κάποιον (μιγαδικό) χώρο Hilbert H

(συχνά πεπερασμένης διάστασης, οπότε $H \simeq \ell_n^2 := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$).

Ο $\mathcal{X}$ κληρονομεί από τον $\mathcal{B}(H)$ τη νόρμα $\|\cdot\|$:

$$\|x\| := \sup\{\|x\xi\|_H : \xi \in \text{ball}(H)\}.$$

Κάθε $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H είναι επίσης τελεστής (στον H^n).

(Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ τότε δρα στον H^n με πολλα/σμό πινάκων:

$$[a_{ij}][\xi_j] = [\sum_k a_{ik}\xi_k].)$$

Συνεπώς κάθε $M_n(\mathcal{X})$ κληρονομεί τη νόρμα $\|\cdot\|_n$ του $\mathcal{B}(H^n)$.

Δηλαδή, εκτός απ' τον $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, έχουμε και την οικογένεια

$$\{(M_n(\mathcal{X}), \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Δομη χωρου τελεστων στον $M_n(E)$

Αν $E \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι χωρος τελεστων, τότε για καθε $n \in \mathbb{N}$ ο χωρος $M_n(E)$ είναι χωρος τελεστων: $M_n(E) \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ με νορμα

$$\|[x_{ij}]\|_n := \sup\{\|[x_{ij}]\vec{\xi}\|_{H^n} : \|\vec{\xi}\|_{H^n} = 1\}.$$

Άσκηση

(R1) Αν $\alpha, \beta \in M_n$ και $x \in M_n(E)$ τότε

$$\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \leq \|\alpha\| \|x\|_n \|\beta\|$$

(οπου $\|\cdot\|$ η νορμα του M_n και $\|\cdot\|_n$ η νορμα του $M_n(E)$).

(R2) Αν $x \in M_n(E)$ και $y \in M_m(E)$ τότε ο

$$x \oplus y := \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_{n+m}(E) \text{ ικανοποιει}$$

$$\|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}.$$

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια απεικόνιση

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \rightarrow M_n(\mathcal{Y}) : [x_{ij}] \rightarrow [\Phi(x_{ij})].$$

Η Φ λέγεται **πλήρως φραγμένη (completely bounded)** αν $\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$.

Σημ: $\|\Phi_n\| = \sup\{\|[\Phi(x_{ij})]\|_n : x_{ij} \in \mathcal{X}, \|[x_{ij}]\|_n \leq 1\}$.

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Παρατήρηση Η $\Phi : M_2 \rightarrow M_2 : a = a^\dagger$ (ανάστροφος) είναι ισομετρία στον $E = M_2$. Όμως, ενώ το

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει νόρμα 1 στον $M_2(M_2) \simeq M_4$ **[Άσκηση!]**, το

$$\Phi_2(A) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν έχει νόρμα 1. **[Άσκηση!]** Συνεπώς $\|\Phi_2\| > 1 = \|\Phi\|$.

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : a \rightarrow a^*$, που έχει τις ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$.

(β) $a^{**} = a$.

(γ) $(ab)^* = b^*a^*$.

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \rightarrow A^*$ στον $\mathcal{B}(H)$

όπου $(A^*y, x) = (y, Ax)$ για κάθε $x, y \in H$.

Επίσης, η $f \rightarrow f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$
(όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

Ορισμός

Άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ που είναι και άλγεβρα με την ιδιότητα $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.

Ορισμός

C*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : a \rightarrow a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη **ιδιότητα C***:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$ -κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα αν είναι **αυτοσυζυγής (selfadjoint)**, δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Θα δειξουμε:

- **Θεωρημα** Καθε μεταθετικη C^* -άλγεβρα με μοναδα «είναι» (ισομ. $*$ -ισομ.) της μορφης $C(K)$ για καποιο μοναδικο συμπαγη χώρο Hausdorff K .
- **Θεωρημα** Καθε C^* -άλγεβρα αναπαρισταται ως κλειστη $*$ -υπαλγεβρα του χωρου $\mathcal{B}(H)$ για καποιον (οχι μοναδικο) χωρο Hilbert H .

Προχειρα Παραδειγματα

Αλγεβρες: Με πολλ/σμο κατα σημειο οι $\ell^\infty, c_0, \ell^1, C(K)$ αλλα οχι ο $L^1([0, 1])$ (πχ η $f(t) = t^{-1/2}$ για $t \neq 0$ ανηκει στον $L^1([0, 1])$ αλλα η f^2 οχι).

Αλγεβρα με πολλ/σμο πινακων (μη μεταθετικη): η $M_n(\mathbb{C})$ για $n > 1$.

Γενικευση: η $\mathcal{B}(E)$ με πολλ/σμο τη συνθεση απεικονισεων (οπου E χωρος με νορμα).

Αλγεβρες Banach (απαιτειται επιπλεον να ειναι χωρος Banach και $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$): Οι ℓ^∞ και c_0 και $C(K)$ με τη νορμα $\|\cdot\|_\infty$, ο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Η $\mathcal{B}(E)$ ειναι αλγεβρα Banach οταν ο E ειναι χωρος Banach.

C* Αλγεβρες (απαιτειται επιπλεον και η υπαρξη ενελιξης που να ικανοποιει την ιδιοτητα C*: $\|a^*a\| = \|a\|^2$): Οι ℓ^∞ και c_0 και $C(K)$ ειναι C* αλγεβρες με $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Ομως ο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ με τις πραξεις που κληρονομει απ τον ℓ^∞ δεν ειναι C* αλγεβρα, ουτε ο $(\ell_2^1, \|\cdot\|_1)$.

Η $\mathcal{B}(H)$ ειναι C* αλγεβρα οταν ο H ειναι χωρος Hilbert, οποτε η ενελιξη οριζεται μεσω της δρασης στον H οπως ειδαμε.

Αντιστρεψιμα στοιχεία

Εστω Αν $\mathcal{A}$ μια αλγεβρα Banach με μοναδα 1.

Ορισμός

Ενα $a \in \mathcal{A}$ λεγεται **αντιστρεψιμο (invertible)** αν υπαρχει $b \in \mathcal{A}$ ωστε $ab = 1$ και $ba = 1$. Το στοιχειο αυτο ειναι μοναδικο, αν υπαρχει, και συμβολιζεται a^{-1} .

Το συνολο των αντιστρεψιμων στοιχειων της $\mathcal{A}$ συμβολιζεται $\text{Inv } \mathcal{A}$ ή $\text{GL}(\mathcal{A})$.

Πρόταση

(i) Αν $\|1 - a\| < 1$ τοτε το a ειναι αντιστρεψιμο και μαλιστα

$$a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a)^k.$$

(ii) Το $\text{Inv } \mathcal{A}$ ειναι ανοικτο υποσυνολο της $\mathcal{A}$ και η απεικονιση $a \mapsto a^{-1}$ ειναι συνεχης στο $\text{Inv } \mathcal{A}$ (αρα ομοιομορφισμος).

Το Φάσμα ενός στοιχείου

Ορισμός

Εστω Αν $\mathcal{A}$ μια αλγεβρα Banach με μοναδα 1 και $a \in \mathcal{A}$. Το **φάσμα** $\sigma(a)$ του a είναι το σύνολο μιγαδικών αριθμών λ για τους οποίους το $\lambda 1 - a \in \mathcal{A}$ δεν έχει αντιστρόφο στην $\mathcal{A}$:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \text{Inv } \mathcal{A}\}.$$

Θεώρημα

Το φάσμα $\sigma(a)$ κάθε στοιχείου $a \in \mathcal{A}$ είναι συμπαγές και μη κενό (!) υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

(Αποδειξεις στο [spban25.pdf](#).)

Η φασματική ακτινα ενός στοιχειου

Η φασματική ακτινα (*spectral radius*) $\rho(a)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Εχουμε $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά όχι ισότητα εν γενει (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα (Gelfand-Beurling)

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν $\mathcal{A}$ είναι C^* -άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγες ($a^* = a$) ή γενικότερα φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.

(Αποδειξη στο [gelbe.pdf](#).)

Η μοναδοποίηση μιας C^* αλγεβρας

Αν $\mathcal{A}$ είναι αλγεβρα, ορίζουμε $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Ο γραμμ. χώρος $\mathcal{A}_1$ γίνεται αλγεβρα αν ορίσουμε

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \quad x, y \in \mathcal{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Η $\mathcal{A}_1$ έχει μοναδα το στοιχείο $(0, 1)$.

Ορισμός

Αν $\mathcal{A}$ είναι αλγεβρα χωρίς μοναδα και $a \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το φασμα του a ως το φασμα του $(a, 0)$ στη μοναδοποίηση $\mathcal{A}_1$ της $\mathcal{A}$:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a, 0) - \lambda(0, 1) \notin \text{Inv } \mathcal{A}_1\}.$$

(Δηλαδή $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a, -\lambda) \notin \text{Inv } \mathcal{A}_1\}$.)

Η μοναδοποίηση μιας C^* αλγεβρας

Πρόταση

Εστω $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ μια C^* -αλγεβρα *χωρίς μοναδα*. Θετω

$$(x, \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x, \lambda) \in \mathcal{A}_1).$$

και

$$\|(x, \lambda)\|_\pi := \sup\{\|xy + \lambda y\| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\}.$$

Η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ είναι C^* -αλγεβρα με μοναδα που περιεχει την $\mathcal{A}$ ως μεγιστικο ιδεωδες.

Παράδειγμα

Αν $\mathcal{A} = c_0(\mathbb{N})$, τότε $\mathcal{A}_1 = c(\mathbb{N})$ (οι συγκλινουσες ακολουθιες).

(Αποδειξεις στο [unitiz.pdf](#).)

Συνεχεια μορφισμων, μοναδικοτητα της νορμας

Λήμμα

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* -αλγεβρες και η $\mathcal{B}$ έχει μοναδα 1_B , κάθε $*$ -μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ επεκτείνεται μοναδικα σε $*$ -μορφισμο $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ με $\phi_1((0, 1)) = 1_B$.

(Αποδειξη: Ασκηση)

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* -αλγεβρες, κάθε (αλγεβρικός) $*$ -μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι αυτοματως συνεχης, μαλιστα $\|\phi(a)\| \leq \|a\| \ \forall a \in \mathcal{A}$. Επομενως κάθε $*$ -ισομορφισμος επι είναι ισομετρια.

Σε μια C^* -αλγεβρα, η νορμα καθορίζεται απο την αλγεβρικη δομη:

Πρόταση

Μια $*$ -αλγεβρα $\mathcal{A}$ δεχεται το πολυ μια νορμα ως προς την οποια είναι C^* -αλγεβρα.

(Αποδειξεις στο morph25.pdf.)

Παράδειγμα

Εστω K συμπαγής χώρος Hausdorff (πχ μετρικός χώρος).

$$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : \text{συνεχής}\}.$$

Με πράξεις και ενελίξη κατά σημείο, και τη νόρμα supremum, η $C(K)$ είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα τη σταθερή συναρτησι.

Το πρώτο Θεώρημα Gelfand-Naimark λει ότι «δεν υπάρχουν άλλες»:

Καθε μεταθετική C^ -άλγεβρα με μονάδα «είναι» (ισομ. $*$ -ισομ.) της μορφής $C(K)$ για καποιο (μοναδικο) συμπαγη χώρο Hausdorff K .*

Ορισμός

Χαρακτήρας ή *πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή* σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας *μη μηδενικός μορφισμός* $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Δηλαδή η ϕ ικανοποιεί

$$\phi \neq 0, \quad \phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda \phi(b), \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.

Το σύνολο των χαρακτήρων μιας C^* άλγεβρας μπορεί να είναι το κενό (παραδειγμα η $M_2(\mathbb{C})$). Θα δείξουμε όμως ότι οι *μεταθετικές C^* -άλγεβρες* έχουν πάντα «αρκετούς» χαρακτήρες.

Παρατήρηση

Εστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα.

Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.

Συνεπώς $\|\phi\| = 1$ (αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$).

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Παρατήρηση Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση).

Ορισμός

Εστω $\mathcal{A}$ αλγεβρα Banach με μονάδα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ονομάζουμε $\hat{a}$ την συναρτηση

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a).$$

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Η $\hat{a}$ είναι συνεχής συναρτηση που απεικονίζει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ επι του $\sigma(a)$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(x).$$

Θεώρημα (Gelfand Naimark I)

Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα. Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*) : x \mapsto \hat{x}$$

(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \rho(x) \leq \|x\|.$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

(Αποδειξεις στο [metath25.pdf](#).)

Ενα παραδειγμα

$$\ell^1(\mathbb{Z}) := \{a = (a(n))_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)| := \|a\|_1 < \infty\}$$

Καθε $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ γραφεται

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e_n$$

(απολυτη συγκλιση) οπου $e_n(m) = \delta_{nm}$. Επομενως η πραξη $e_n * e_m := e_{n+m}$ (το $\mathbb{Z}$ ειναι ομαδα!) επεκτεινεται στην $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$(a * b)(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) b(n - k)$$

και η $(\ell^1(\mathbb{Z}), *, \|\cdot\|_1)$ γινεται αβελιανη αλγεβρα Banach με μονάδα το e_0 .
Η απεικονιση

$$(\ell^1(\mathbb{Z}), *, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(\mathbb{T}), \cdot, \|\cdot\|_\infty) : a \mapsto f_a$$

οπου $f_a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n$, ($z \in \mathbb{T}$) (δηλαδη, $\hat{f}_a(n) = a(n)$) ειναι συνεχης μορφισμος αλγεβρων. Ειναι 1-1, αλλα οχι επι.

Παρατηρηση

Ο χωρος των χαρακτηρων της $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ ειναι ο

$$\{\phi_z : z \in \mathbb{T}\}$$

οπου $\phi_z(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n$, $a = (a(n)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Ειναι ομοιομορφικος με τον κυκλο $\mathbb{T}$ μεσω της απεικονισης $z \mapsto \phi_z$.

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}$ είναι C^* -αλγεβρα με μοναδα 1, καθε χαρακτηρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ικανοποιει

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} \quad \text{για καθε } a \in \mathcal{A}.$$

Στο επομενο Πορισμα, δεν απαιτειται η μεταθετικοτητα της C^* αλγεβρας $\mathcal{A}$.

Πόρισμα

Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

(Υπενθυμιση: Αν η $\mathcal{A}$ δεν εχει μοναδα, το $\sigma(a)$ υπολογιζεται στη μοναδοποιηση.)

Μεταθετικές C^* -άλγεβρες

Θεώρημα (Gelfand Naimark I)

Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα. Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G} : x \rightarrow \hat{x} : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$$

είναι ισομετρικός $*$ -μορφισμός (δηλ. διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη) από την $\mathcal{A}$ επί της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$ και ικανοποιεί $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Θεώρημα (Gelfand - Naimark)

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, και $K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ο χώρος των χαρακτηρών της με την ασθενή- $*$ τοπολογία, τότε η απεικόνιση Gelfand $\mathcal{G} : a \mapsto \hat{a}$ είναι ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός από την $\mathcal{A}$ επί της $C_0(K)$.

Μεταθετικές C^* -αλγεβρες

Παρατήρηση

Εστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μεταθετικές C^* -αλγεβρες με μοναδα.

Αν $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός τότε η απεικόνιση $h : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \phi \mapsto \phi \circ \alpha$ είναι ομοιομορφισμός.

Σχολίο Δυο διαφορετικές (δηλ. μη ισομορφες) αλγεβρες Banach με μοναδα μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο χαρακτηριστικών. Παραδειγμα: η $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ και η $(C(\mathbb{T}), \cdot)$ (εξηγηστε γιατί).

Η προηγούμενη Παρατήρηση δείχνει ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν και οι δύο είναι C^* -αλγεβρες.

Πρόταση

Αν K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και $\mathcal{A} = C(K)$, η απεικόνιση $K \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) : t \mapsto \delta_t$ όπου $\delta_t(f) = f(t)$ είναι ομοιομορφισμός.

Συνδυάζοντας την Παρατήρηση με την Πρόταση, προκύπτει η ακόλουθη

Πρόταση (Μοναδικότητα)

Εστω $\mathcal{A}$ C^ -αλγεβρα και K συμπαγής χώρος Hausdorff. Αν υπάρχει αλγεβρικός ισομορφισμός $\mathcal{A} \rightarrow C(K)$, τότε ο K είναι ομοιομορφικός με τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

(Αποδειξεις στο [metath25.pdf](#).)

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C^* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Αποδείξεις στο αρχείο [spdep25.pdf](#).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός)

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Υπάρχει $*$ -μορφισμός

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$$

με $\omega_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\omega_c(\text{id}) = a$ *αν και μόνον αν $a^*a = aa^*$* . Η απεικόνιση ω_c (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το σύνολο τιμών της είναι ακριβώς η C^* -υπόαλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$.

Συμβολισμός: Γράφουμε συνήθως $f(a)$ αντί για $\omega_c(f)$.

Ορισμός

Έστω $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Η απεικόνιση

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A} : f \mapsto f(a)$$

ονομάζεται **συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις** (continuous functional calculus).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Το σύνολο

$$\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a και συμβολίζεται $C^*(1, a)$. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολωνύμων των a και a^* .

Αν $f \in C(\sigma(a))$ και (p_n) μια οποιαδήποτε ακολουθία πολωνυμων ως προς z και $\bar{z}$ που προσεγγίζει την f ομοιομορφα στο συμπαγες $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$, τότε $\|f(a) - p_n(a, a^*)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα (Φασματικής απεικόνισης - Spectral mapping theorem)

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$. Το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^\sim$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.

Αποδείξεις στο αρχείο [funcal25met.pdf](#).

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται **θετικό** (γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$.

Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παρατήρηση Η συνθήκη $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ δεν συνεπαγεται πάντα $a = a^*$:
Παραδειγμα το $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ στην $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$.

Παραδείγματα - Ασκήσεις

- Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
- Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
- Στην $\mathcal{B}(H)$ (H μιγαδικος χωρος Hilbert): $T \geq 0$ ανν $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος:

$$a, b \in \mathcal{A}_+, \lambda \geq 0 \implies \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Λήμμα

Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu 1 \leq x \leq \mu 1$

$$\text{και} \quad x \geq 0 \iff \|x - \mu 1\| \leq \mu.$$

Πόρισμα

$$\mathcal{A}_+ = \{x \in \mathcal{A} : x = x^* \text{ και } \|\|x\| 1 - x\| \leq \|x\|\}.$$

Πρόταση

Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$ -κλειστός και γνήσιος, δηλαδή
$$\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } a = b^2.$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathcal{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(1, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.

Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*$, $b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Θεώρημα

Σε μια C^ άλγεβρα $\mathcal{A}$, ένα στοιχείο είναι θετικό ανν είναι της μορφής a^*a .*

Αποδείξεις στο αρχείο [cone.pdf](#).

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται **θετική** αν $\phi(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Λέγεται **κατάσταση (state)** αν $\|\phi\| = 1$. Λέγεται **πιστή (faithful)** αν $\phi(a^*a) > 0$ για κάθε $a \neq 0$.

Πρόταση

Αν ϕ είναι θετική γραμμική μορφή τότε $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) = \phi(b^*a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο αν-ν η ϕ είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b) \text{ για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathcal{A}$ τότε

$$\phi(a^*a) = 0 \iff \phi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, $\|\phi\| = \phi(1)$.

Απόδειξη (όταν $1 \in \mathcal{A}$)

$$0 \leq a^*a \leq \|a^*a\| 1 = \|a\|^2 1 \Rightarrow 0 \leq \phi(a^*a) \leq \|a\|^2 \phi(1). \text{ Αλλά } |\phi(a)|^2 = |\phi(1^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(1^*1) \text{ άρα } |\phi(a)|^2 \leq \|a\|^2 \phi(1)^2.$$

Παραδείγματα

- 1 Στην $\mathcal{B}(H)$, (i) η $\phi(T) = (T\xi, \xi)$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)
- 2 (ii) η $\psi(T) = \sum_i \lambda_i (T\xi_i, \xi_i)$ όπου $\|\xi_i\| = 1$, $\lambda_i \geq 0$ και $\sum \lambda_i = 1$.
- 3 Στην $C(K)$, (i) η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
- 4 (ii) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
- 5 Σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, η $\phi(a) = (\pi(a)\xi, \xi)$.

Αντίστροφο του (5) είναι η κατασκευή GNS:

Κάθε κατάσταση σε μια C^* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση (δες το Θεώρημα 51 σε λίγο).

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μοναδα 1. Μια γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετική αν-ν $\phi(1) = \|\phi\|$.

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει κατασταση ϕ της $\mathcal{A}$ ώστε

$$\phi(a^*a) = \|a\|^2.$$

Απόδειξη Αν $b := a^*a$ και $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\psi : C^*(1, b) = \{f(b) : f \in C(\sigma(b))\} \rightarrow \mathbb{C} : f(b) \mapsto f(\lambda_0)$$

και επεκτείνω (HB!) το ψ σε $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ κατάσταση (αφού $\|\phi\| = \phi(1) = 1$), οπότε $\phi(a^*a) = \psi(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$.

Αποδείξεις στο αρχείο [plf25.pdf](#).

Intermezzo: Διαγωνιοί τελεστές στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$

- **Διαγωνιοί τελεστές** Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$ είναι φραγμένη ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $D_a e_k = a_k e_k$.
- Αν Γ τυχόν με κενό σύνολο (πχ. $\Gamma = [0, 1]$) ορίζω

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \exists M : \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. } \sum_{t \in F} |x(t)|^2 \leq M^2\}$$

Με $\|x\|_2 := \inf\{M : \sum_{t \in F} |x(t)|^2 \leq M^2 \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ.}\}$, ο $\ell^2(\Gamma)$

γίνεται χώρος Hilbert με ο.κ. βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ (οπου $\delta_t(s) = 1$ αν $s = t$ και $\delta_t(s) = 0$ αλλιως).

Κάθε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, όπως για το $\mathbb{N}$.

Intermezzo II: Αναπαραστάσεις της $C([0, 1])$: Παραδείγματα

- π_1 στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$ όπου $\Gamma = [0, 1]$: Για κάθε $f \in C([0, 1])$, ορίζουμε $\pi_1(f) \in \mathcal{B}(\ell^2([0, 1]))$ από τη σχέση $\pi_1(f) = D_f$ δηλ.
 $(\pi_1(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in \ell^2([0, 1])$ και $t \in [0, 1]$.

Το ίδιο για την $C(\Gamma)$ όπου Γ συμπαγής χώρος Hausdorff, αρα για οποιαδήποτε μεταθετική C^* αλγεβρα $\mathcal{A}$ με μοναδα, όπου Γ το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$.

- π_2 στον $\ell^2([0, 1] \cap \mathbb{Q})$: ίδιος τύπος $\pi_2(f) = D_f$, αλλά ο $\ell^2([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ είναι διαχωρίσιμος.

- π_μ στον $L^2([0, 1], \mu)$. Ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2([0, 1], \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0, 1], \mu)$ και $(\mu$ -σχεδόν) κάθε $t \in [0, 1]$.

Οι π_1 και π_2 είναι πιστές αναπαραστάσεις. Για την π_μ , εξαρτάται από τον φορέα του μέτρου.

Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μοναδα υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ σ' έναν χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό¹ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = (\pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

¹δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ .

[Η απόδειξη στο αρχείο [gns25.pdf](#).]

- 1 Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.
- 2 Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $(a, b)_0 := \phi(b^*a)$.
Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ έχουμε $(a, b)_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
- 3 Αφού ϕ θετική, $(a, a)_0 = \phi(a^*a) \geq 0$.
Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
 $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} : (u, u)_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
- 4 Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ ($= L^2(\mu)$) την
πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{(a, a)_0}$.
(γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

Βήματα απόδειξης GNS II

5 Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμ. χώρο $\mathcal{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6 Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.

7 Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \|b\|_\phi$.

[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .

Εύκολο: η $\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι $*$ -αναπαράσταση.

[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ.

$(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

8 Θέτουμε $\xi_\phi = [1_\mathcal{A}]$. Τότε

$$\begin{aligned} (\pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi)_{H_\phi} &= (\pi_\phi(a)[1], [1])_{H_\phi} \\ &= (a, 1)_{H_\phi} = \phi(1^*a) = \phi(a). \quad \square \end{aligned}$$

Η Αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην $\mathcal{A}$. Αν (π, H, ξ) αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε

$$(\pi(a)\xi, \xi) = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι **unitarily ισοδύναμη** με την $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$. Δηλαδή υπάρχει μια επί ισομετρία $U : H_\phi \rightarrow H$ που ικανοποιεί

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και } U\xi_\phi = \xi.$$

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ C^* άλγεβρα ώστε $I_H \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := (A\xi, \xi)$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι **unitarily ισοδύναμη** με την $A \rightarrow A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$

(... και μπορώ $U\xi_\phi = \xi$.) **Απόδειξη: Άσκηση.**

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) := (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$.

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(x_1) \\ T_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το **ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert** $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\xi = (\xi_i)$ με $\xi_i \in H_i$ για κάθε $i \in I$ και

$$\|\xi\|_H := \sup \left\{ \left(\sum_{i \in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} < \infty.$$

Άσκηση Ο H είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$(\xi, \eta)_H = \sum_{i \in J_\xi} (\xi_i, \eta_i)_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το **αλγεβρικό ευθύ άθροισμα**

$H_0 := \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H .

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή
 $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \rightarrow H_0 : (x_i) \rightarrow (T_i x_i).$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\text{supp}(T_i x_i) \subseteq \text{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H .

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή
 $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν
 $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα

$$\left\| \bigoplus_i T_i \right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* -άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \rightarrow \oplus H_i : (x_i) \rightarrow (\pi_i(a)x_i).$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \rightarrow \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Η π είναι μια $*$ -αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* -άλγεβρα και $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των states της $\mathcal{A}$.
Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός

Η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ είναι η (π, H) όπου

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} H_\phi \quad \text{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Στόχος:

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.

Επομένως κάθε C^ -άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και $*$ -ισομορφικά ως πιστή C^* -υπόαλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

Απόδειξη: $\rightsquigarrow$

Η καθολική αναπαράσταση

Απόδειξη Θεωρήματος Gelfand-Naimark

Έχουμε δείξει (δες την Πρόταση 50) ότι

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$.

Συνεπώς $\|\pi_\phi(a)\| = \|a\|$ άρα $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Παρατήρηση Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$ με την ιδιότητα, για κάθε $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ να υπάρχει κάποιο $\phi = \phi_a \in \mathcal{F}$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\left(\bigoplus_{\phi \in \mathcal{F}} H_\phi\right) \quad \text{όπου} \quad \pi_{\mathcal{F}}(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{F}} \pi_\phi(a), \quad a \in \mathcal{A}$$

είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ πυκνό υποσύνολο της $\mathcal{A}$, για κάθε $i \in I$ έστω π_i αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ ώστε $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi := \bigoplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η $\mathcal{A}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

«Υπερτελεστές»: Απεικονίσεις μεταξύ χώρων τελεστών

Έστω $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή χώρων τελεστών)² και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow M_n(\mathcal{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

- Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι $*$ -άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n .
- Αν η Φ είναι $*$ -μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n .
- ΔΕΝ έπεται πάντα ότι αν η Φ είναι θετική, το ίδιο ισχύει για την Φ_n .

Υπενθύμιση

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ μεταξύ C^* αλγεβρών είναι **θετική** ανν

$$a \geq 0 \Rightarrow \Phi(a) \geq 0.$$

²**χωρος τελεστων** είναι ένας γραμμικός υποχωρος καποιου $\mathcal{B}(H)$

Παράδειγμα Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathcal{A} = M_2$:
προφανώς θετική. Όμως, ενώ το

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι θετικό στην $M_2(M_2) \simeq M_4$, το

$$\Phi_2(A) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι θετικό.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις και τανυστικά γινόμενα

Υπενθύμιση E γραμμικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$:

$$E \otimes \mathbb{C}^n \simeq E^n : x \otimes [\lambda_i]_{i=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_n x \end{bmatrix} : x \otimes e_i \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \mathbb{M}^n \simeq M_n(E) : x \otimes [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x & \dots & a_{1n}x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x & \dots & a_{nn}x \end{bmatrix}$$
$$: x \otimes \varepsilon_{ij} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Πλήρως θετικές, πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Υπενθύμιση Αν $\Phi : E \rightarrow F$ γραμμική

$$\begin{aligned} \leadsto \Phi_n : M_n(E) &\rightarrow M_n(F) : [x_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto [\Phi(x_{ij})]_{i,j=1}^n \\ E \otimes M_n &\rightarrow F \otimes M_n : x \otimes \varepsilon_{ij} \mapsto \Phi(x) \otimes \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

Δηλαδή αν $\Phi : E \rightarrow F$ γραμμική

$$\leadsto \Phi_n := \Phi \otimes \text{id}_{M_n} : E \otimes M_n \rightarrow F \otimes M_n.$$

Αν A, B είναι C^* -άλγεβρες (ή γενικότερα operator systems) μια

$\Phi : A \rightarrow B$ γραμμική λέγεται **πλήρως θετική - completely positive (cp)**

αν για κάθε n η $\Phi_n : A \otimes M_n \rightarrow B \otimes M_n$ είναι θετική.

Λέγεται **πλήρως φραγμένη - completely bounded (cb)** αν

$$\sup_n \|\Phi_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B)\| := \|\Phi\|_{cb} < \infty.$$

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων:

Κάθε $*$ -μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \ \forall a$).

Άρα κάθε $*$ -μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί π_n $*$ -μορφισμός).

Κάθε απεικόνιση $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K) : a \mapsto V^*aV$ είναι πλήρως θετική (εδώ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $V \in \mathcal{B}(K, H)$). Σύνθεση:

Επομένως κάθε $a \rightarrow V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.

Δεν υπάρχουν άλλες:

Stinespring's Theorem: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ από μια C^* -άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι $*$ -αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ σ' έναν χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \rightarrow H_\phi$ είναι φραγμένη, ώστε

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όταν $\Phi(1) = 1$, η V είναι ισομετρία.

Η $*$ -αναπαράσταση π λέγεται **διαστολή** της Φ μέσω της «εμφύτευσης» $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ (όταν $\Phi(1) = 1$).

[Υπάρχει και μια συνθήκη ελαχιστότητας.]

(Πλήρης απόδειξη στο [stineproof25.pdf](#).)

Βήματα απόδειξης Stinespring

- 1 Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον $\mathcal{A} \otimes H = \text{span}\{a \otimes \xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in H\} := \widetilde{\mathcal{A}}$.

Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.

- 2 Ορίζουμε $(a \otimes \xi, b \otimes \eta)_0 := (\Phi(b^*a)\xi, \eta)_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^N b_m \otimes \eta_m \right)_0 := \left(\Phi_N(B^*A) \vec{\xi}, \vec{\eta} \right)_{H^N}.$$

όπου $B^*A = [b_1^*, \dots, b_N^*]^\dagger [a_1, \dots, a_N] \in M_N(\mathcal{A})$,

$\vec{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_N]^\dagger \in H^N$.

Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $(a, b)_0 = \phi(b^*a)$.

- 3 Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι

$$(\vec{a}, \vec{a})_0 = \left(\sum_{n=1}^N a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^N a_m \otimes \xi_m \right)_0 \geq 0.$$

Από Cauchy-Schwarz το σύνολο

$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{ \vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : (\vec{u}, \vec{u})_0 = 0 \}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

- 4 Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
- 5 Η $\mathcal{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\pi_0(a)(b \otimes \xi) &:= ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H) \\ \text{ισοδύναμα } \pi_0(a) &:= L_a \otimes \text{id}_H \quad (a \in \mathcal{A}).\end{aligned}$$

(όπου $L_a : A \rightarrow A : b \mapsto ab$).

(Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $[\pi_0(a)(b) = ab]$).

- 6 Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] = [ab \otimes \xi].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7 Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leq \|a\| \|\vec{b}\|_\phi$.

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .

Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.

8 Ορίζουμε

$$V : H \rightarrow \mathcal{A} \otimes H \rightarrow H_{0\phi} \subseteq H_\phi : \xi \rightarrow 1_{\mathcal{A}} \otimes \xi \rightarrow [1_{\mathcal{A}} \otimes \xi]$$

Τέλος, για κάθε $\xi, \eta \in H$,

$$\begin{aligned} ((V^* \pi(a) V) \xi, \eta)_H &= (\pi(a) V \xi, V \eta)_{H_\phi} = (\pi(a) [1 \otimes \xi], [1 \otimes \eta])_{H_\phi} \\ &= ([a \otimes \xi], [1 \otimes \eta])_{H_\phi} = (\Phi(1^* a) \xi, \eta)_H. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|V\| = \|\Phi(1)\|$ και

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a). \quad \square$$

Πότε μια θετική απεικόνιση είναι πλήρως θετική;

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* άλγεβρες και $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι μια θετική γραμμική απεικόνιση, τότε είναι η Φ πλήρως θετική;

- Εν γένει, η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.
- Αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι μεταθετικές C^* άλγεβρες, τότε η θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα. (Αποδείξεις παραλείπονται.)
- Θα δείξουμε εδώ ότι αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι ίσες με $M_d(\mathbb{C})$, τότε (η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα, αλλά) η d -θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

(Αποδείξεις στο [choiarv25.pdf](#).)

Η περίπτωση $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$

Θεώρημα (Choi)

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια C^* άλγεβρα και $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ γραμμική, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 $H \Phi$ είναι πλήρως θετική.
- 2 $H \Phi$ είναι d -θετική.
- 3 Ο πίνακας $[\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.
(Οι E_{rs} είναι τα *matrix units* της $M_d(\mathbb{C})$.)

Αναπαράσταση Kraus Στην περίπτωση $\mathcal{B} = M_k(\mathbb{C})$, η πλήρης θετικότητα της Φ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη γραμμικών απεικονίσεων $V_1, \dots, V_m \in M_m = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ($m \leq kd$) ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^m V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}).$$

Ο ελάχιστος αριθμός μη μηδενικών V_j που απαιτούνται για την αναπαράσταση Kraus της Φ ονομάζεται *τάξη Kraus* της Φ .

Ο $d^2 \times d^2$ πίνακας $[E_{rs}]$ των $d \times d$ πινάκων $\{E_{rs} : r, s \in [d]\}$

$$[E_{rs}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = uu^*$$

Συστήματα τελεστών (Operator Systems)

Σύστημα τελεστών (operator system) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (ή $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{B}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα) που είναι αυτοσυζυγής και περιέχει την μονάδα.

Παραδείγματα

$$\mathcal{S}_1 := \text{span}\{e, 1, e^*\} \subseteq C(\mathbb{T})$$

όπου $e(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}_2 := \text{span}\{S, 1, S^*\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2)$$

όπου $S : e_n \mapsto e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B})$ είναι σύστημα τελεστών, αν εφοδιασθεί με την δομή (ενέλιξη, μονάδα και θετικό κώνο $M_n(\mathcal{S})^+ := M_n(\mathcal{B})^+ \cap M_n(\mathcal{S})$) που κληρονομεί από την C^* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B})$.

Αν $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ είναι συστήματα τελεστών, μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ λέγεται **θετική** αν $\varphi(\mathcal{S}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$ και **πλήρως θετική** αν για κάθε n η απεικόνιση $\varphi^n : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow M_n(\mathcal{T}) : [x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$ είναι θετική.

Αντιστοιχία Arveson: Η περίπτωση $\Phi : V \rightarrow M_d(\mathbb{C})$

Συμβολισμοί Αν V είναι operator system και $\phi : V \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ γραμμική απεικόνιση, ορίζουμε μια γραμμική μορφή $s_\phi : M_d(V) \rightarrow \mathbb{C}$ ως εξής:

$$s_\phi(A) = \sum_{i,j=1}^d (\phi(a_{i,j})e_j, e_i)_{\ell^2[d]}, \quad A = [a_{i,j}] \in M_d(V)$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^d$ η κανονική βάση του $\ell^2[d]$.

Θεώρημα

Έστω V ένα σύστημα τελεστών, $d \in \mathbb{N}$ και $\phi : V \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

- (1) $H \phi : V \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.
- (2) $H \phi : V \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ είναι d -θετική.
- (3) $H s_\phi : M_d(V) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετική.

Επέκταση θετικών απεικονίσεων

(Αποδείξεις στο arvext25.pdf.)

Πρόταση

Αν V είναι ένα σύστημα τελεστών και $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή, τότε η ω είναι θετική αν και μόνον αν (είναι φραγμένη και) $\|\omega\| = \omega(1)$ (όπου 1 η μονάδα του V).

Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \rightarrow M_2(\mathbb{C})$.

Παράδειγμα

Έστω $V \subseteq C(\mathbb{T})$ η γραμμική θήκη των $\{1, \zeta, \bar{\zeta}\}$ όπου $\zeta(z) = z$. Δηλαδή κάθε $f \in V$ είναι της μορφής $f(e^{it}) = a + be^{it} + ce^{-it}$ με $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Ορίζουμε

$$\phi : V \rightarrow M_c(\mathbb{C}) : f \mapsto \begin{bmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{bmatrix}.$$

Τότε η ϕ είναι θετική αλλά $\|\phi\| > \|\phi(1)\|$.

Λήμμα

Έστω $V \subseteq \mathcal{B}(H)$ ένα σύστημα τελεστών και $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή με $\|\omega\| = \omega(1) = 1$. Για κάθε $x = x^* \in V$, έχουμε

$$\min \sigma(x) \leq \omega(x) \leq \max \sigma(x)$$

(όπου $\sigma(x)$ το φάσμα του τελεστή $x \in V \subseteq \mathcal{B}(H)$).

Λήμμα

Έστω V ένα σύστημα τελεστών.

- (1) Αν $a \in V$, το $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \in M_2(V)$ είναι θετικό αν και μόνον αν $\|a\| \leq 1$.
- (2) Έστω $a \in V$ και $p \in V^+$. Αν το $\begin{bmatrix} p & a \\ a^* & p \end{bmatrix} \in M_2(V)$ είναι θετικό, τότε $\|a\| \leq \|p\|$.

Πρόταση

Αν V ένα σύστημα τελεστών και $\Phi : V \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι 2-θετική, τότε $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\|$ (δηλαδή $\|\Phi(v)\| \leq \|\Phi(1)\|$ για κάθε $v \in V$ με $\|v\| \leq 1$).

Πρόταση

Αν V ένα σύστημα τελεστών και $\Phi : V \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi(1)\|$ (δηλαδή $\|[\Phi(v_{ij})]\| \leq \|\Phi(1)\|$ για κάθε $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$ με $\|v\| \leq 1$).

Θέτοντας $\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi^{(n)}\|$, λέμε ότι η Φ είναι πλήρως φραγμένη (completely bounded) αν $\|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Πρόταση (Krein)

Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ μια θετική γραμμική μορφή, τότε η ω έχει επέκταση σε μια γραμμική μορφή $\tilde{\omega} : W \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι θετική.

Παράδειγμα: Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \rightarrow M_2(\mathbb{C})$. Πράγματι, αν η απεικόνιση ϕ του Παραδείγματος 65 είχε θετική επέκταση στην $C(\mathbb{T})$, τότε η επέκταση αυτή θα ήταν πλήρως θετική από ένα θεώρημα του Stinespring (δες shrlem23.pdf, Θεώρημα 5) (αφού η $C(\mathbb{T})$ είναι αβελιανή), οπότε θα έπρεπε να ικανοποιεί $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.

Θεώρημα επέκτασης Arveson

Θεώρημα (Arveson)

Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\Phi : V \rightarrow \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση, τότε η Φ έχει επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση $\tilde{\Phi} : W \rightarrow \mathcal{B}(H)$ που είναι πλήρως θετική.

Πρόταση

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα και $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση, υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι $*$ -αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \rightarrow H_\phi$ είναι φραγμένη, ώστε

$$\Phi(x) = V^* \pi(x) V \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{S}.$$

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Θεώρημα (Riesz)

Έστω K (τοπικά) συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε θετική γραμμική μορφή $\phi : C_c(K) \rightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό κανονικό (θετικό) μέτρο Borel μ στον K 'wste

$$\phi(g) = \int g d\mu \quad \text{για κάθε } g \in C_c(K).$$

Για μια απόδειξη δες π.χ. Κουμουλλή-Νεγρεπόντη, Θεώρημα 12.26 ή W. Rudin, Real & Complex Analysis, Theorem 2.14.

Το φασματικό θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής είναι unitarily ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ) , συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής (ισομετρία επί) $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ ώστε $A = U M_f U^{-1}$.

Για την απόδειξη: 

Το φασματικό θεώρημα

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \rightarrow H$ ώστε $U_x M_f = f(A)U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$).

Απόδειξη Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C} : f \rightarrow \langle f(A)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι θετική γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Το φασματικό θεώρημα

Όμως $C(\sigma(A)) \subseteq L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_2) \rightarrow (H, \|\cdot\|_H) : f \rightarrow f(A)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_H^2 &= \langle f(A)x, f(A)x \rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x \rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x \rangle \\ &= \int \bar{f}f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \rightarrow H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = (fg)(A)x = f(A)(g(A)x) = (f(A)U_x)(g).$$

$$\text{άρα } U_x M_f = f(A)U_x.$$



Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Το σύνολο τιμών $\text{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο **κυκλικός υπόχωρος**

$$H_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \dots]} = \overline{[x, Ax, A^2x, \dots]}$$

του x για τον A .

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται **κυκλικό (cyclic)** για τον τελεστή $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο H , ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \dots]$ είναι πυκνός στον H .

Πρόταση

Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_1} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_1}(g))(t) = tg(t)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0, 1]) \oplus L^2([0, 1])$ ³ και έστω $A = M_{f_1} \oplus M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in [0, 1]$). Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Λήμμα

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H , ώστε

- (i) κάθε H_i να είναι A -αναλλοίωτος, δηλ. $A(H_i) \subseteq H_i$
- (ii) κάθε H_i να είναι A -κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A -κυκλικό διάνυσμα
- (iii) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H .

³ με το εσωτερικό γινόμενο $(f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2)$

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$X_i = \sigma(A), \quad f_i(\lambda) = \lambda(\lambda \in X_i)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i \\ \uparrow \oplus U_i & & \uparrow \oplus U_i \\ \oplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \end{array}$$

$$AU_i = M_{f_i} U_i \quad \forall i \in I \Rightarrow AU = (\oplus M_{f_i})U \text{ όπου } U = \oplus U_i.$$

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i \\
 \uparrow \oplus U_i & & \uparrow \oplus U_i \\
 \oplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \\
 \uparrow V & & \uparrow V \\
 L^2(X, \mu) & \xrightarrow{M_f} & L^2(X, \mu)
 \end{array}$$

Λεπτομέρειες στο Α. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών. Σημειώσεις* §8.

Το Φασματικό Θεώρημα (αυτοσυζυγείς τελεστές)

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ) , συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ ώστε $A = U M_f U^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ -πεπερασμένο μέτρο Borel.

Ορισμός

Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ φραγμενων τελεστών σ' έναν χώρο Hilbert H λέγεται **μετρο με τιμες θετικους τελεστες (positive operator valued measure, POVM)** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

- 1 Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xx} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, x \rangle$ είναι (σ-προσθετικό, θετικό) μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.
- 2 $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)_+$ για καθε $\Omega \in \mathcal{S}$
- 3 $E(\emptyset) = 0$ και $E(K) = I$
Η $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ λέγεται **μετρο με τιμες προβολες (projection valued measure, PVM)** αν ικανοποιεί επιπλεον την ιδιοτητα
- 4 $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1).E(\Omega_2)$ για καθε $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{S}$.

Μέτρα με τιμές θετικούς τελεστές

Παρατηρήσεις

(α) Η ιδιότητα (1) είναι ισοδυναμική με την ακόλουθη: Για κάθε $x, y \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xy} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y \rangle$ είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.

(β) Από την (4) έπεται ότι κάθε $E(\Omega)$ είναι ορθή προβολή (αυτοσυζυγής και ταυτοδυναμική) και ότι ένα μέτρο με τιμές προβολές είναι μεταθετική οικογένεια τελεστών (πραγμα που δεν ισχύει εν γένει για μέτρα με τιμές θετικούς τελεστές).

(γ) Συνήθως ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που ο K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και η $\mathcal{S}$ είναι η σ -άλγεβρα των Borel υποσυνολών του K . Τότε απαιτούμε συνήθως το E να είναι κανονικό μέτρο, δηλαδή το μέτρο μ_{xx} να είναι κανονικό (θετικό) μέτρο Borel για κάθε $x \in H$.

From POVM's to unital positive maps

Εστω $\mathcal{L}^\infty(K)$ η C^* αλγεβρα όλων των φραγμενων μετρησιμων *συναρτησεων* $f : K \rightarrow \mathbb{C}$.

Πρόταση

Για καθε $POVM$ E σ' εναν μετρήσιμο χωρο $(K, \mathcal{S})$, η απεικονιση $\chi_\Omega \mapsto E(\Omega)$ επεκτεινεται σε μια θετικη μοναδιαια γραμμικη απεικονιση

$$\Psi_E : \mathcal{L}^\infty(K) \rightarrow \mathcal{B}(H)$$

που ικανοποιει

$$(\Psi_E(f)x, y) = \int_K f d\mu_{xy}$$

για καθε $(x, y) \in H \times H$ και $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$.

εδω $\mu_{xy} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y \rangle$.

From unital positive maps to POVM's

Στην αντιστροφή κατευθυνση:

Στο εξής συμβολίζουμε με $(K, \mathcal{S})$ έναν συμπαγή χώρο Hausdorff K με την σ -άλγεβρα Borel $\mathcal{S}$.

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{L}^\infty(K)$ περιέχει την C^* -υπαλγεβρά $C(K)$, με την ίδια μονάδα.

Πρόταση

Για κάθε θετική μοναδιαία γραμμική απεικόνιση $\Phi : C(K) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικό κανονικό Borel POVM E_Φ ώστε, αν $\mu_{xy}(\Omega) := \langle E_\Phi(\Omega)x, y \rangle$ για κάθε $(x, y) \in H \times H$, να έχουμε

$$(\Phi(f)x, y) = \int_K f d\mu_{xy} \quad \text{για κάθε } f \in C(K).$$

PVM's correspond bijectively to *-morphisms

Πόρισμα

Καθε θετικη μοναδιαια γραμμικη απεικονιση $\Phi : C(K) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται σε μια θετικη μοναδιαια γραμμικη απεικονιση $\Psi : \mathcal{L}^\infty(K) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιει $\Psi(\chi_\Omega) = E_\Phi(\Omega)$ για καθε $\Omega \in \mathcal{S}$. Συνεπως $\Psi|_{C(K)} = \Phi$.

Συμβολισμος: Συμβολιζουμε τον περιορισμο της $\Psi_E : \mathcal{L}^\infty(K) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ στην $C(K)$ με Φ_E .

Παρατήρηση

Οι απεικονισεις $\Phi \mapsto E_\Phi$ και $E \mapsto \Phi_E$ ειναι αντιστροφες η μια της αλλης.

Πρόταση

Στην αμφιμονοσημαντη αντιστοιχια $\Phi \leftrightarrow E$ που ορισαμε, η Φ ειναι *-μορφισμος αν και μονον αν το E ειναι μετρο με τιμες προβολες (PVM).

Το Φασματικό Θεώρημα (φυσιολογικοί τελεστές)

Θεώρημα

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, υπάρχει μοναδικό κανονικό Borel PVM E στο $\sigma(A)$ ώστε

$$(Ax, y) = \int_{\sigma(A)} f_1 d\mu_{x,y} \quad \text{για κάθε } (x, y) \in H \times H$$

όπου $f_1(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \sigma(A)$.

Η προηγούμενη ισότητα γραφεται συμβολικά

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda.$$

Θεώρημα

Εστω $(K, \mathcal{S})$ συμπαγής χώρος Hausdorff K με την σ -άλγεβρα Borel $\mathcal{S}$. Εστω $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{B}(H)_+$ κανονικό Borel μέτρο με τιμές θετικούς τελεστές (POVM). Το E δεχεται διαστολή σε ένα μέτρο με τιμές προβολές (PVM) $\tilde{E}$ σ' έναν «μεγαλύτερο» χώρο Hilbert H' : υπάρχει ένας χώρος Hilbert H' , μια ισομετρία $V : H \rightarrow H'$ και ένα PVM $\{\tilde{E}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{B}(H')_+$ τέτοιο ώστε

$$E(\Omega) = V^* \tilde{E}(\Omega) V \quad \text{για κάθε } \Omega \in \mathcal{S}.$$

Αποδείξεις στο [ponm.pdf](#).