

Τανυστικά γινόμενα και χώροι τελεστών

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/>

A. Κατάβολος

4 Μαΐου 2025

Καθε γραμμικός χώρος είναι χώρος συναρτησεων

Παρατήρηση 1. Αν E είναι $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος, υπάρχει μη κενό σύνολο S (οχι μοναδικό) και γραμμική 1-1 απεικόνιση $\iota : E \rightarrow \mathbb{K}^S$.¹

Έτσι, ταυτίζοντας τον E με την ισομορφική εικόνα του $\iota(E) \subseteq \mathbb{K}^S$, μπορούμε να θεωρούμε τον E ως γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{K}^S$.

- Για παράδειγμα, αν S είναι μια Hamel (δηλ. αλγεβρική) βάση του E , τότε κάθε $\xi \in E$ γραφεται μοναδικά $\xi = \sum_{s \in S} \tilde{\xi}(s)s$, όπου $\tilde{\xi}(s) \in \mathbb{K}$ και $\tilde{\xi}(s) \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος $s \in S$. Δηλαδή η $\tilde{\xi} : S \rightarrow \mathbb{K}$ είναι μια συνάρτηση με πεπερασμένο φορέα.

Η απεικόνιση $\iota : E \rightarrow \mathbb{K}^S : \xi \mapsto \tilde{\xi}$ είναι προφανώς γραμμική και 1-1.

- Αν ο E είναι χώρος με νόρμα (ή γενικότερα τοπικά κυρτός χώρος) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως S οποιοδήποτε σύνολο συνεχών γραμμικών μορφών στον E (δηλαδή $S \subseteq E^*$) αρκεί το S να χωρίζει τα σημεία του E , δηλαδή για κάθε $x \in E$, $x \neq 0$ να υπάρχει $x^* \in S$ ώστε $x^*(x) \neq 0$.

Τότε η απεικόνιση $\iota : E \rightarrow \mathbb{K}^S$ όπου $\iota(x)(x^*) := x^*(x)$, $x^* \in S$ είναι γραμμική και 1-1.

- Ειδικότερα αν ο E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως S την μοναδιαία σφαίρα του E ή μια ορθοκανονική του βάση, και την απεικόνιση $\iota : E \rightarrow \mathbb{K}^S$ όπου $\iota(x)(s) := \langle x, s \rangle$, $s \in S$.

Διγραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 1. Αν E_1, E_2, F είναι $\mathbb{K}$ -γραμμικοί χώροι, μια απεικόνιση

$$b : E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

λεγεται **διγραμμική (bilinear)** αν

για κάθε $y \in E_2$ η $x \mapsto b(x, y) : E_1 \rightarrow F$ είναι γραμμική και

για κάθε $x \in E_1$ η $y \mapsto b(x, y) : E_2 \rightarrow F$ είναι γραμμική.

Ο γραμμικός χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων $E_1 \times E_2 \rightarrow F$ συμβολίζεται $\text{bil}(E_1 \times E_2, F)$. Όταν $F = \mathbb{K}$ γράφουμε $\text{bil}(E_1 \times E_2)$ αντι για $\text{bil}(E_1 \times E_2, \mathbb{K})$.

Στοχος Να δείξουμε ότι υπάρχει γραμμικός χώρος $E_1 \otimes E_2$ που γραμμικοποιεί όλες τις διγραμμικές απεικονίσεις $E_1 \times E_2 \rightarrow F$.

¹file: tensors25, compiled 4 Μαΐου 2025

Πιο συγκεκριμένα, στοχεύουμε να δείξουμε ότι για το ζεύγος (E_1, E_2) :
υπάρχει γραμμικός χώρος G και διγραμμική απεικόνιση $\pi : E_1 \times E_2 \rightarrow G$ με $\text{span}(\pi(E_1 \times E_2)) = G$ που ικανοποιεί την ακόλουθη

Καθολική Ιδιότητα (ΚΙ)

Για κάθε $\mathbb{K}$ -γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : G \rightarrow F$ ώστε $B(\pi(x, y)) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\pi} & G \\ \downarrow b & \searrow B & \\ F & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Τανυστικό γινόμενο: Μοναδικότητα

Αν υπάρχουν τανυστικά γινόμενα δυο χώρων E_1 και E_2 , είναι όλα ισομορφα μεταξύ τους:

Πρόταση 1. Έστω G_1, G_2 δυο $\mathbb{K}$ -γραμμικοί χώροι και $\pi_i : E_1 \times E_2 \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$) διγραμμικές απεικονίσεις. **Υποθέτουμε** ότι για κάθε γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \rightarrow F$, υπάρχουν μοναδικές γραμμικές απεικονίσεις $B_i : G_i \rightarrow F$ ($i = 1, 2$) ώστε $B_i \circ \pi_i = b$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xleftarrow{\pi_1} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G_2 \\ & \searrow \exists! B_1 & \downarrow b & \swarrow \exists! B_2 & \\ & & F & & \end{array}$$

Τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$:

$$\begin{array}{ccc} & E_1 \times E_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \end{array}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $(F, b) = (G_2, \pi_2)$: έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$.

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xleftarrow{\pi_1} & E_1 \times E_2 \\ & \searrow \exists! \phi & \downarrow \pi_2 \\ & & G_2 \end{array}$$

Δείχνουμε ότι η ϕ είναι 1-1 και επί:

Εφαρμόζοντας την υπόθεση για $(F, b) = (G_1, \pi_1)$, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\psi : G_2 \rightarrow G_1$ ώστε $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G_2 \\ \downarrow \pi_1 & \swarrow \exists! \psi & \\ G_1 & & \end{array}$$

Από τις σχέσεις $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$ και $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$ έχουμε

$$\pi_1 = \psi \circ \pi_2 = \psi \circ \phi \circ \pi_1 .$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση $\psi \circ \phi : G_1 \rightarrow G_1$ ικανοποιεί $\pi_1 = (\psi \circ \phi) \circ \pi_1$. Επίσης όμως ισχύει ότι $\pi_1 = \text{id}_{G_1} \circ \pi_1$. Από την μοναδικότητα στην υπόθεση πρέπει οι απεικονίσεις $\psi \circ \phi$ και id_{G_1} να είναι ίσες.

Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό αυτό με τους ρόλους των G_1 και G_2 αντεστραμμένους, συμπεραίνουμε ότι ισχύει επίσης η ισότητα $\phi \circ \psi = \text{id}_{G_2}$. Αυτό σημαίνει ότι η ϕ είναι 1-1 και επί (με αντίστροφο την ψ). $\square$

Υπαρξη

Απο τη μοναδικότητα, οποιοδήποτε ζευγος (G, π) που ικανοποιει την καθολικη ιδιοτητα ειναι (ισομορφικο με) το τανυστικο γινομενο.

Υπενθυμίζουμε οτι καθε γραμμικος χωρος E μπορεί να αναπαρασταθει (μεσω ενος γραμμικου ισομορφισμου) ως γραμμικος χωρος συναρτησεων ορισμενων σε καποιο μη κενο συνολο S (Παρατηρηση 1). Επομενως για τους E_1, E_2 μπορουμε να υποθεσουμε οτι υπαρχουν μη κενα συνολα S_1 και S_2 ωστε $E_i \subseteq \mathbb{K}^{S_i}, i = 1, 2$.

Ορίζουμε για $x \in E_1, y \in E_2$ την $x \otimes y \in \mathbb{K}^{S_1 \times S_2}$ απο τον τυπο

$$x \otimes y : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{K} : (s, t) \mapsto x(s)y(t)$$

και **θετουμε**

$$E_1 \otimes E_2 := \text{span}\{x \otimes y : x \in E_1, y \in E_2\} \subseteq \mathbb{K}^{S_1 \times S_2}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\pi : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \otimes E_2 : (x, y) \mapsto x \otimes y$ είναι διγραμμική:

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \quad x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ (\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$$

για κάθε $x, x' \in E_1, y, y' \in E_2, \lambda \in \mathbb{K}$.

Θα δείξουμε ότι το ζευγος $(E_1 \otimes E_2, \pi)$ ικανοποιεί την Καθολική Ιδιότητα.

Θα χρειασθεί το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 2. Κάθε $u \in E_1 \otimes E_2$ μπορεί να γραφεί ως (πεπερασμένο) άθροισμα $u = \sum_k e_k \otimes f_k$ όπου τα $\{f_k\} \subseteq E_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, τα e_k καθορίζονται μοναδικά από τα f_k .

Απόδειξη. Έστω $u = \sum_j x_j \otimes y_j$ μια αναπαράσταση του u . Θεωρούμε μια βάση $\{f_k\} \subseteq E_2$ του υπόχωρου (πεπερασμένης διάστασης) $\text{span}\{y_j\} \subseteq E_2$. Γράφουμε κάθε $y_j = \sum_k f_k^*(y_j) f_k$, όπου το $f_j^* \in E_2^d$ ικανοποιεί $f_j^*(f_i) = \delta_{ij}$.² Τότε

$$u = \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_j x_j \otimes \left(\sum_k f_k^*(y_j) f_k \right) = \sum_{j,k} f_k^*(y_j) (x_j \otimes f_k) \\ = \sum_k \left(\sum_j f_k^*(y_j) x_j \right) \otimes f_k = \sum_k e_k \otimes f_k$$

όπου $e_k := \sum_j f_k^*(y_j) x_j$.

Μοναδικότητα: Αν $u = \sum_k e'_k \otimes f_k$ τότε για κάθε $s \in S_1$ έχουμε $\sum_k e'_k(s) f_k = \sum_k e_k(s) f_k$ από το οποίο έπεται ότι $e'_k(s) = e_k(s)$ για κάθε k από τη γραμμική ανεξαρτησία της $\{f_k\}$. Δηλαδή $e'_k = e_k$ για κάθε k . $\square$

Πρόταση 2 (Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \otimes E_2, \pi)$). Για κάθε $\mathbb{K}$ -γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$:

Δηλαδή αν $\pi : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \otimes E_2 : (x, y) \mapsto x \otimes y$, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\pi} & E_1 \otimes E_2 \\ \downarrow b & \swarrow B & \\ F & & \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

²Συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών μορφών σ' έναν γραμμικό χώρο E (τον αλγεβρικό δυϊκό) με το σύμβολο E^d

³Τα f_j^* είναι οι λεγόμενες “διορθογώνιες” μορφές. Δεν είναι αναγκαίες για τα παρακάτω, αρκεί να γράψει κανείς $y_j = \sum_k \lambda_{k,j} f_k$ όπου $\lambda_{k,j} \in \mathbb{K}$.

Με άλλα λόγια, ο γραμμικός χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων $E_1 \times E_2 \rightarrow F$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των γραμμικών απεικονίσεων $E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$:

$$\text{bil}(E_1 \times E_2, F) \simeq \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F).$$

Ειδικότερα

$$\text{bil}(E_1 \times E_2) \simeq (E_1 \otimes E_2)^d.$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει η B , είναι μοναδική: γιατί αν δυο γραμμικές απεικονίσεις $B_i : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$ ικανοποιούν $B_1(x \otimes y) = b(x, y) = B_2(x \otimes y)$ για κάθε $(x, y) \in E_1 \times E_2$, τότε $B_1 = B_2$ εφόσον $E_1 \otimes E_2 := \text{span}\{x \otimes y : (x, y) \in E_1 \times E_2\}$. Έστω $u = \sum_j x_j \otimes y_j \in E_1 \otimes E_2$. Ορίζουμε

$$B(u) := \sum_j b(x_j, y_j).$$

Για να δείξουμε ότι η B είναι καλά ορισμένη, πρέπει να δείξουμε ότι το άθροισμα $\sum_j b(x_j, y_j)$ είναι ανεξάρτητο από την αναπαράσταση του u , δηλαδή ότι, αν το u γράφεται επίσης $u = \sum_i x'_i \otimes y'_i$, τότε

$$\sum_j b(x_j, y_j) = \sum_i b(x'_i, y'_i).$$

Ισοδύναμα, αν $\sum_j x_j \otimes y_j = 0$ στον $E_1 \otimes E_2$, πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_j b(x_j, y_j) = 0$ στον F .

Σταθεροποιούμε μια αλγεβρική βάση $\{f_k\}$ του χώρου E_2 .⁴ Γράφουμε κάθε y_j ως προς τη βάση: $y_j = \sum_k f_k^*(y_j) f_k$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_j x_j \otimes \left(\sum_k f_k^*(y_j) f_k \right) = \sum_j \sum_k f_k^*(y_j) (x_j \otimes f_k) \\ &= \sum_k \left(\sum_j f_k^*(y_j) x_j \right) \otimes f_k \end{aligned}$$

Αφού τα $\{f_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε $\sum_j f_k^*(y_j) x_j = 0$ για κάθε k από τη μοναδικότητα (Πρόταση 2). Τότε όμως,

$$\begin{aligned} \sum_j b(x_j, y_j) &= \sum_j b(x_j, \sum_k f_k^*(y_j) f_k) = \sum_j \sum_k f_k^*(y_j) b(x_j, f_k) \\ &= \sum_k b(\sum_j f_k^*(y_j) x_j, f_k) = \sum_k b(0, f_k) = 0 \end{aligned}$$

όπως θέλαμε.

Αυτό δείχνει ότι η B είναι καλά ορισμένη.

⁴Μάλιστα αρκεί να παρουμε μια βάση $\{f_k\}$ του χώρου (πεπερασμένης διαστάσης) $\text{span}\{y_j\}$.

Η γραμμικότητα έπεται απ' το καλά ορισμένο: αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ και $v = \sum_j z_j \otimes w_j$, τότε η $\sum_i x_i \otimes y_i + \sum_j z_j \otimes w_j$ είναι μία γραφή του $u + v$ οπότε

$$B(u + v) = \sum_i b(x_i, y_i) + \sum_j b(z_j, w_j) = B(u) + B(v).$$

Επίσης $B(\lambda u) = \sum_i b(\lambda x_i, y_i) = \lambda \sum_i b(x_i, y_i) = \lambda B(u)$ αφού η b είναι διγραμμική. $\square$

Ειδικες περιπτώσεις

Αν E γραμμικός χώρος και $n \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση:

$$E^n \rightarrow E \otimes \mathbb{K}^n : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_i x_i \otimes e_i$$

(εδώ τα e_i είναι η συνηθισμένη βάση του $\mathbb{K}^n$) είναι γραμμική και 1-1. Είναι επίσης επι, γιατί κάθε $u = \sum_j x_j \otimes y_j \in E \otimes \mathbb{K}^n$ μπορεί να γραφτεί $\sum_i x'_i \otimes e_i$. Επομένως είναι γραμμικός ισομορφισμός με αντιστρόφιο την απεικόνιση

$$E \otimes \mathbb{K}^n \simeq E^n : x \otimes [\lambda_i]_{i=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_n x \end{bmatrix} : x \otimes e_i \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ειδικότερα $E \otimes \mathbb{K} \simeq E$ μέσω της απεικόνισης $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$.

Με αναλόγο τρόπο (ή παρατηρώντας ότι $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ ως γραμμικοί χώροι) βλέπουμε ότι έχουμε γραμμικό ισομορφισμό:

$$E \otimes M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(E) : x \otimes [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x & \dots & a_{1n}x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x & \dots & a_{nn}x \end{bmatrix}$$

$$: x \otimes \varepsilon_{ij} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(εδώ ε_{ij} είναι ο $n \times n$ πίνακας που έχει 1 στην i γραμμή και j στηλη και 0 παντού αλλού).

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών απεικονίσεων

Αν $\phi \in E_1^d$ και $\psi \in E_2^d$ ορίζονται τα λεγόμενα **slice maps**

$$\text{id}_1 \otimes \psi : E_1 \otimes E_2 \rightarrow E_1 : x_1 \otimes x_2 \mapsto x_1 \psi(x_2)$$

$$\phi \otimes \text{id}_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow E_2 : x_1 \otimes x_2 \mapsto \phi(x_1) x_2.$$

Γενικότερα

Πρόταση 3. Έστω $T_i : E_i \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$) γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow G_1 \otimes G_2$$

$$\text{ώστε } x_1 \otimes x_2 \mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$$

για κάθε $x_1 \in E_1$ και $x_2 \in E_2$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση

$$E_1 \times E_2 \rightarrow G_1 \otimes G_2 \quad (x_1, x_2) \mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$$

είναι διγραμμική. Επομένως από την καθολική ιδιότητα επαγεί μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_1 \otimes T_2$ όπως στην εκφώνηση. $\square$

Η ταξη ενός τανυστή

Αν $u \in E_1 \otimes E_2$, η **ταξη (rank)** του u είναι ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχουν $(x_i, y_i) \in E_1 \times E_2$ ώστε $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

• Τότε οι οικογένειες $\{x_1, \dots, x_n\}$ και $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι και οι δύο γραμμικά ανεξαρτητές.

Απόδειξη. Αν τα $\{y_1, \dots, y_n\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξαρτητά, μπορούμε αλλάζοντας την αρίθμηση να υποθέσουμε ότι $y_n \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$. Τότε όμως, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2, βρίσκουμε μια αναπαράσταση $u = \sum_{i=1}^{n-1} x'_i \otimes y_i$, πράγμα που αντιβαίνει στην ελαχιστικότητα του n .

Με το ίδιο επιχειρήμα δείχνουμε ότι η $\{x_1, \dots, x_n\}$ δεν μπορεί να είναι γραμμικά εξαρτημένη. $\square$

• Αντιστρόφως, αν ο u γραφεται $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ όπου οι $\{x_1, \dots, x_n\}$ και $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι και οι δύο γραμμικά ανεξαρτητές, τότε η ταξη του είναι ακριβώς n .

Οι γραμμικοί χώροι $X_u := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ και $Y_u := \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ εξαρτώνται μονον από τον u .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $m := \text{rank } u$. Υπάρχει τότε μια αναπαράσταση $u = \sum_{k=1}^m e_k \otimes f_k$ όπου και οι δύο οικογένειες $\{e_k\}$ και $\{f_k\}$ είναι γραμμ. ανεξαρτητές, όπως δείξαμε.

Εφαρμόζοντας την y_i^* (δες το Λήμμα 2) στην ισοτιμία

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = u = \sum_{k=1}^m e_k \otimes f_k \quad (*)$$

εχουμε

$$x_i = \sum_{k=1}^m y_i^*(f_k) e_k,$$

αρα κάθε x_i ανηκει στον $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$, οποτε $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$. Αφου και η $\{f_k\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητη, εφαρμοζοντας την f_k^* στην ισοτητα (*) προκυπτει οτι $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, αρα ισχυει ισοτητα.

Ομοιως χρησιμοποιωντας τη γραμμικη ανεξαρτησια της οικογενειας $\{x_i\}$ προκυπτει οτι $\text{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$. Αλλα αφου και η οικογενεια $\{e_k\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητη, εχουμε $\text{span}\{y_1, \dots, y_n\} = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$.

Δηλαδη εχουμε $X_u = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ και $Y_u = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$. Επεται οτι $m = n$ και οτι οι χωροι X_u, Y_u εξαρτωνται μονον απο το u . □

Παρατήρηση 2. Φαινεται πως δειξαμε κατι ισχυροτερο: αν ο $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$

εχει ταξη n , τοτε καθε αναπαρασταση $u = \sum_{k=1}^m e_k \otimes f_k$ οπου η οικογενεια $\{f_k\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητη ικανοποιει την σχεση $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, δηλαδη η οικογενεια $\{e_k\}$ παραγει τον χωρο X_u .⁵ Αντιστοιχο συμπερασμα για τον Y_u εχουμε για μια αναπαρασταση οπου η οικογενεια $\{e_k\}$ εχει επιλεγει γραμμικα ανεξαρτητη.

Οι τανυστες ως γραμμικοι τελεστες

• Καθε $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E_1 \otimes E_2$ με $n = \text{rank } u$ οριζει εναν γραμμικο τελεστη⁶

$$R_u : E_2^d \rightarrow E_1 : \psi \mapsto \sum x_i \psi(y_i).$$

(Πραγματι, εφοσον $\sum x_i \psi(y_i) = (\text{id}_1 \otimes \psi)(u)$, επεται οτι η παρασταση $\sum x_i \psi(y_i)$ εξαρταται μονον απο το u και οχι απο την γραφη του u ως $\sum x_i \otimes y_i$).

• Ο τελεστης R_u εχει πεπερασμενη ταξη: το συνολο τιμων του ειναι η γραμμικη θηκη $\text{span}\{x_i\}$ που εχει πεπερασμενη διασταση.

(Πραγματι απο τον ορισμο του R_u ειναι φανερο οτι καθε $R_u(\psi)$ ανηκει στην $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, ενω απο την αλλη μερια επιλεγοντας $\psi_i \in E_2^d$ ωστε $\psi_i(y_j) = \delta_{ij}$ (γραμμ. ανεξαρτησια των $\{y_1, \dots, y_n\}$) βλεπουμε οτι $R_u(\psi_i) = x_i$, αρα καθε x_i ανηκει στο συνολο τιμων του R_u .)

• Δεν ειναι ομως αληθεια, οταν ο E_2 ειναι απειροδιαστατος, οτι καθε τελεστης πεπερασμενης ταξης $T : E_2^d \rightarrow E_1$ ειναι της μορφης R_u .

Για παραδειγμα, αν επιλεξουμε ενα μη-μηδενικο $x \in E_1$ και μια μη μηδενικη γραμμικη μορφη $\omega : E_2^d \rightarrow \mathbb{K}$ (δηλαδη $\omega \in E_2^{dd}$), τοτε ο τελεστης $T : \psi \mapsto \omega(\psi)x : E_2^d \rightarrow E_1$ ειναι βεβαια πρωτης ταξης, αλλα δεν ειναι της μορφης R_u , εκτος αν η ω ειναι της μορφης $\omega : \psi \mapsto \psi(y)$ για καποιο $y \in E_2$.

⁵Εδω η γραμμικη ανεξαρτησια της $\{f_k\}$ δεν μπορει να παραληφθει: για παραδειγμα ενας $u = e \otimes f \neq 0$ γραφεται και $u = (e - e') \otimes f + e' \otimes f$ με $e' \neq 0$ ενω η $\{e, e'\}$ δεν παραγει τον X_u , που ειναι μονοδιαστατος.

⁶και επισης εναν γραμμικο τελεστη $L_u : E_1^d \rightarrow E_2 : \phi \mapsto \sum \phi(x_i)y_i$

- Δηλαδή η απεικόνιση

$$u \mapsto R_u : E_1 \otimes E_2 \rightarrow \mathcal{F}(E_2^d, E_1)$$

είναι γραμμική και ⁷ 1-1 δεν είναι όμως επί, όταν ο E_2 είναι απειροδιαστατός.

- Στην περίπτωση που ο δεύτερος χώρος είναι δυτικός χώρος, δηλαδή αν

$$v = \sum x_i \otimes \psi_i \in E_1 \otimes E_2^d$$

ο τελεστής

$$T_v : E_2 \rightarrow E_1 : y \mapsto \sum x_i \psi_i(y)$$

είναι καλά ορισμένος ⁸ και έχει πεπερασμένη τάξη.

Τώρα, κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης $E_2 \rightarrow E_1$ είναι της μορφής T_v , δηλαδή η απεικόνιση

$$v \mapsto T_v : E_1 \otimes E_2^d \rightarrow \mathcal{F}(E_2, E_1)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

(Πραγματι, αν ένας τελεστής $T : E_2 \rightarrow E_1$ έχει πεπερασμένη τάξη n , επιλέγουμε μια βάση $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E_1$ του συνόλου τιμών του, οπότε για κάθε $y \in E_2$ υπάρχουν μοναδικά $\{\lambda_1(y), \dots, \lambda_n(y)\} \subseteq \mathbb{K}$ ώστε $Ty = \sum_i \lambda_i(y)x_i$. Αν $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq E_1^d$ ικανοποιούν $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$, τότε $\phi_i(Ty) = \lambda_i(y)$ για κάθε $y \in E_2$. Έπεται ότι η απεικόνιση $y \mapsto \lambda_i(y) = \phi_i(Ty) : E_2 \rightarrow \mathbb{K}$ είναι γραμμική, δηλαδή ανήκει στον E_2^d (είναι η $\phi_i \circ T : E_2 \rightarrow \mathbb{K}$) και έχουμε

$$T = T_v \text{ όπου } v = \sum_i (\phi_i \circ T) \otimes x_i.$$

- Ομοίως, στην περίπτωση

$$w = \sum \phi_i \otimes y_i \in E_1^d \otimes E_2$$

ο τελεστής

$$S_w : E_1 \rightarrow E_2 : x \mapsto \sum \phi_i(x)y_i$$

είναι καλά ορισμένος και έχει πεπερασμένη τάξη. Κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης $E_1 \rightarrow E_2$ είναι της μορφής S_w , δηλαδή η απεικόνιση

$$w \mapsto S_w : E_1^d \otimes E_2 \rightarrow \mathcal{F}(E_1, E_2)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

⁷ Αν $R_u = 0$, τότε το σύνολο τιμών του είναι $\{0\}$, άρα κάθε $x_i = 0$, άρα $u = 0$.

⁸ προκύπτει ουσιαστικά για τον περιορισμό του $R_v : E_2^{dd} \rightarrow E_1$ στον E_2 , αν θεωρήσουμε τον E_2 ως υποχώρο του E_2^{dd}

Το ιχνο

Η απεικόνιση $E^d \times E \rightarrow \mathbb{K} : (\phi, x) \mapsto \phi(x)$ είναι διγραμμική, επομένως ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\text{tr} : E^d \otimes E \rightarrow \mathbb{K} : \sum_i \phi_i \otimes x_i \mapsto \sum_i \phi_i(x_i).$$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης $T \in \mathcal{F}(E)$, είναι της μορφής $T = S_w$ όπου $w = \sum_i \phi_i \otimes x_i \in E_1^d \otimes E_2$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\text{tr}_E(T) = \text{tr}(T) := \text{tr}(w).$$

Πρόταση 4. Αν ένας γραμμικός τελεστής $T : E \rightarrow E$ έχει τάξη n τότε ο δυικός τελεστής

$$T^d : E^d \rightarrow E^d : \phi \mapsto \phi \circ T$$

έχει επίσης τάξη n και $\text{tr}_{E^d}(T^d) = \text{tr}_E(T)$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $T = S_u$ όπου $u = \psi \otimes x \in E^d \otimes E$.

Ισχυρισμός Έχουμε $T^d = S_v$ όπου $v = \hat{x} \otimes \psi \in (E^d)^d \otimes E^d$ (εδώ $\hat{x}(\phi) := \phi(x)$) για κάθε $\phi \in E^d$.

Πραγματι: Για κάθε $\phi \in E^d$ έχουμε $S_v(\phi) = \hat{x}(\phi)\psi = \phi(x)\psi$ οπότε, αν $y \in E$,

$$\begin{aligned} S_v(\phi)(y) &= \phi(x)\psi(y) = \phi(x\psi(y)) = \phi(S_u(y)) \quad (\text{γιατι } S_u(y) = \psi(y)x) \\ &= \phi(T(y)) = (\phi \circ T)(y) \end{aligned}$$

αρα $S_v(\phi) = \phi \circ T = T^d(\phi)$ όπως θέλαμε.

Στη γενική περίπτωση $T \in \mathcal{F}(E)$ με $\text{rank}(T) = n$, μπορούμε να γράψουμε $T = S_u$ όπου $u = \sum_{i=1}^n \psi_i \otimes x_i$, με $\text{rank}(u) = n$, όπως είδαμε, οπότε από τον Ισχυρισμό

έχουμε $T^d = S_v$ όπου $v = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \otimes \psi_i \in (E^d)^d \otimes E^d$. Τότε $\text{rank}(T^d) = \text{rank}(v)$ που ισούται με n (αφού οι οικογενείες $\{\hat{x}_i\}$ και $\{\psi_i\}$ είναι και οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες). Τέλος, έχουμε

$$\text{tr}_{E^d}(T^d) = \text{tr}(v) = \sum_i \hat{x}_i(\psi_i) = \sum_i \psi_i(x_i) = \text{tr}(u) = \text{tr}_E(T).$$

□

Πρόταση 5. Αν $S : E_1 \rightarrow E_2$ και $T : E_2 \rightarrow E_1$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και τουλάχιστον μια έχει πεπερασμένη τάξη, τότε οι ST και TS έχουν πεπερασμένη τάξη και $\text{tr}_{E_1}(TS) = \text{tr}_{E_2}(ST)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\text{rank}(S) = n < \infty$. Επιλέγοντας μια βάση $\{y_1, \dots, y_n\}$ του χώρου $\text{im } S$ γράφουμε

$$S(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)y_i, \quad x \in E_1.$$

Εχουμε τότε

$$(TS)(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) T y_i.$$

δηλαδή $TS = S_v$ όπου $v = \sum_{i=1}^n \phi_i \otimes (T y_i)$. Επίσης

$$ST(y) = \left(\sum_{i=1}^n \phi_i y_i \right) T(y) = \sum_{i=1}^n (\phi_i \circ T)(y) y_i, \quad y \in E_2$$

δηλαδή $ST = S_w$ όπου $w = \sum_{i=1}^n (\phi_i \circ T) \otimes y_i$.

Επομένως οι TS και ST έχουν πεπερασμένη τάξη ($\leq n$). Για τα ιχνη, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{tr}_{E_2}(ST) &= \text{tr} \left(\sum_{i=1}^n (\phi_i \circ T) \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n (\phi_i \circ T)(y_i) = \sum_{i=1}^n \phi_i(T y_i) \\ \text{tr}_{E_1}(TS) &= \text{tr} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \otimes (T y_i) \right) = \sum_{i=1}^n \phi_i(T y_i) \end{aligned}$$

οπώς θέλαμε. □