

Η μοναδοποίηση μιας C^* άλγεβρας

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα, ορίζουμε $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα αν ορίσουμε

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \quad x, y \in \mathcal{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Η $\mathcal{A}_1$ έχει μονάδα το στοιχείο $(0, 1)$. Ελέγχεται άμεσα ότι το σύνολο $\{(x, 0) : x \in \mathcal{A}\}$ είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$, και μάλιστα μεγιστικό (δηλ. δεν υπάρχει άλλο γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$ που να το περιέχει), αφού έχει συνδιάσταση 1. Το ιδεώδες αυτό είναι ισόμορφο, ως άλγεβρα, με την $\mathcal{A}$. (Σημείωσε ότι, ακόμα και αν η $\mathcal{A}$ έχει ήδη μονάδα $\mathbf{1}$, η $\mathcal{A}$ είναι γνήσιο υποσύνολο της $\mathcal{A}_1$, και το στοιχείο $(\mathbf{1}, 0)$ δεν είναι μονάδα της $\mathcal{A}_1$).

Θα δείξουμε ότι κάθε C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα εμφυτεύεται ισομετρικά ως μεγιστικό ιδεώδες σε μια C^* άλγεβρα με μονάδα.

Έστω $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ μια C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα (δεν υποθέτω ότι η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ εφοδιάζεται με την ενέλιξη

$$(x, \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x, \lambda) \in \mathcal{A}_1).$$

Αποδεικνύεται εύκολα (αλλά δεν θα μας χρειασθεί) ότι η $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα Banach αν εφοδιασθεί με την νόρμα $\|\cdot\|_1$ όπου $\|(x, \lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda|$ ($x \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$). Η $\|\cdot\|_1$ δεν ικανοποιεί¹ την ιδιότητα C^* . Υπάρχει όμως μία νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ ως προς την οποία γίνεται C^* άλγεβρα. Για να την ορίσουμε, θεωρούμε την κανονική αριστερή αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ στον χώρο Banach $\mathcal{A}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}) : x \mapsto \pi(x) \\ \text{όπου } \pi(x) : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} : y \mapsto xy. \end{aligned}$$

Η απεικόνιση π είναι βεβαίως μορφισμός αλγεβρών, και είναι συστολή:

$$\|\pi(x)(y)\| = \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

για κάθε $y \in \mathcal{A}$, αρα $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Επειδή όμως η $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρα, η π είναι ισομετρική: πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x\|_{\mathcal{A}}^2 = \|xx^*\|_{\mathcal{A}} = \|\pi(x)(x^*)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \|x^*\|_{\mathcal{A}} = \|\pi(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} \|x\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_{\mathcal{A}} \|x\|_{\mathcal{A}}$$

άρα $\|\pi(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} = \|x\|_{\mathcal{A}}$. Έτσι εμφυτεύουμε ισομετρικά την $\mathcal{A}$ στην άλγεβρα Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ των τελεστών στον χώρο Banach $\mathcal{A}$. Η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ είναι ισόμορφη ως άλγεβρα με την εξής υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}_1 \simeq \{\pi(a) + \lambda \mathbf{1} : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A})$$

(όπου $\mathbf{1}$ η μονάδα στην $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, δηλ. ο ταυτοτικός τελεστής).

Ισχυρισμός Ο χώρος $\mathcal{E} := \{\pi(a) + \lambda \mathbf{1} : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα του χώρου Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσω ότι η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, οπότε $\mathbf{1} \notin \pi(\mathcal{A})$. Παρατηρώ ότι ο χώρος $\pi(\mathcal{A})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ (γιατί είναι πλήρης, αφού η π είναι ισομετρία και η $\mathcal{A}$ είναι πλήρης). Συνεπώς το $\mathbf{1}$ έχει θετική απόσταση, έστω $\delta > 0$, απ τον υπόχωρο $\pi(\mathcal{A})$, οπότε

$$\|\pi(a) + \lambda \mathbf{1}\| \geq \delta |\lambda| \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

¹ Αν παραδείγματος χάριν $x = x^* \in \mathcal{A}$ τότε $\|(x, i)^*(x, i)\|_1 = \|x\|^2 + 1$ ενώ $\|(x, i)\|_1^2 = (\|x\| + 1)^2$.

Έστω λοιπόν μια βασική ακολουθία τελεστών $(\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1})$. Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\|(\pi(a_n) + \lambda_n \mathbf{1}) - (\pi(a_m) + \lambda_m \mathbf{1})\| \geq \delta |\lambda_m - \lambda_n|,$$

άρα η (λ_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{C}$, άρα συγκλίνει σε κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε όμως και η $(\pi(a_n))$ είναι βασική, αφού $\pi(a_n) = (\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1}) - \lambda_n \mathbf{1}$. Άρα και η (a_n) είναι βασική (αφού η π είναι ισομετρία) συνεπώς κι αυτή συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathcal{A}$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι πλήρης. Τελικώς η $(\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1})$ συγκλίνει στο $\pi(a) + \lambda \mathbf{1}$, όπως θέλαμε.

Επομένως, μεταφέροντας τη νόρμα απ τον χώρο τελεστών $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, ορίζουμε στην $\mathcal{A}_1$ τη νόρμα²

$$\|(x, \lambda)\|_\pi := \|\pi(x) + \lambda \mathbf{1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} = \sup\{\|xy + \lambda y\|_{\mathcal{A}} : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\}.$$

Επειδή η νόρμα στην $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ είναι υποπολλαπλασιαστική και η απεικόνιση $(x, \lambda) \mapsto \pi(x) + \lambda \mathbf{1}$ διατηρεί το γινόμενο, έπεται ότι η $\|\cdot\|_\pi$ είναι υποπολλαπλασιαστική. Έτσι η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ γίνεται άλγεβρα Banach με μονάδα.

Ισχυρισμός Με τον ορισμό $(x, \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda}$, η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ είναι C^* -άλγεβρα.

Απόδειξη Το μόνο που μένει να ελεγχθεί είναι η ιδιότητα C^* :

Έστω $a = (x, \lambda) \in \mathcal{A}_1$. Για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \leq 1$ θεωρούμε το στοιχείο

$$\begin{aligned} (y, 0)^*(x, \lambda)^*(x, \lambda)(y, 0) &= ((x, \lambda)(y, 0))^*((x, \lambda)(y, 0)) \\ &= ((xy + \lambda y)^*(xy + \lambda y), 0) = (z^*z, 0) \in \mathcal{A}_1 \end{aligned}$$

όπου το $z = xy + \lambda y$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (που ικανοποιεί την ιδιότητα C^*), άρα $\|z\|^2 = \|z^*z\|$. Αλλά $\|z^*z\| = \|\pi(z^*z)\| = \|(z^*z, 0)\|_\pi$. Έχω λοιπόν

$$\begin{aligned} \|xy + \lambda y\|^2 &= \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|(z^*z, 0)\| = \|(y, 0)^*(x, \lambda)^*(x, \lambda)(y, 0)\| \\ &\leq \|(y, 0)\|_\pi \|a^*a\|_\pi \|(y, 0)\|_\pi \leq \|a^*a\|_\pi. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|a\|_\pi^2 = \sup\{\|xy + \lambda y\|^2 : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\} \leq \|a^*a\|_\pi.$$

Αυτή ήταν η κρίσιμη ανισότητα. Η αντίστροφη είναι τώρα εύκολη:

$$\|a\|_\pi^2 \leq \|a^*a\|_\pi \leq \|a^*\|_\pi \|a\|_\pi$$

άρα $\|a\|_\pi \leq \|a^*\|_\pi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε $\|a^*\|_\pi \leq \|a^{**}\|_\pi = \|a\|_\pi$ και τώρα η προηγούμενη δίνει

$$\|a\|_\pi^2 \leq \|a^*a\|_\pi \leq \|a^*\|_\pi \|a\|_\pi = \|a\|_\pi^2,$$

επομένως ισχύει ισότητα. □

²ότι είναι πράγματι νόρμα φαίνεται από την ανισότητα (*) (εξηγήστε γιατί).