

Θεωρήματα Choi και Arveson

Αν \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι C^* άλγεβρες και $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι μια θετική γραμμική απεικόνιση, τότε είναι η Φ πλήρως θετική;

- Εν γένει, η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.
- Αν η \mathcal{A} ή η \mathcal{B} είναι μεταθετικές C^* άλγεβρες, τότε η θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα. (Αποδείξεις παραλείπονται. Έχουμε δει την περίπτωση $\mathcal{B} = \mathbb{C}$.)
- Θα δείξουμε εδώ ότι αν η \mathcal{A} ή η \mathcal{B} είναι ίσες με $M_d(\mathbb{C})$, τότε (η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα, αλλά) η d -θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

1 Το Θεώρημα Choi και η αναπαράσταση Kraus

Θεώρημα 1 (Choi). Αν \mathcal{B} είναι μια C^* άλγεβρα και $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ γραμμική, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η Φ είναι πλήρως θετική.
2. Η Φ είναι d -θετική.
3. Ο πίνακας $[\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.
(Οι E_{rs} είναι τα matrix units της $M_d(\mathbb{C})$.)

Αναπαράσταση Kraus Στην περίπτωση $\mathcal{B} = M_k(\mathbb{C})$, η πλήρης θετικότητα της Φ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη γραμμικών απεικονίσεων $V_1, \dots, V_{kd} \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{dk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}).$$

Ο ελάχιστος αριθμός μη μηδενικών V_j που απαιτούνται για την αναπαράσταση Kraus της Φ ονομάζεται *τάξη Kraus* της Φ .

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 1. Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα και $n \in \mathbb{N}$. Ένα στοιχείο της $M_n(\mathcal{A})$ είναι θετικό αν είναι άθροισμα πινάκων της μορφής $[a_i^* a_j]$ όπου $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Κάθε πίνακας αυτής της μορφής είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathcal{A})$: Αν $C = [a_i^* a_j]$, τότε $C = A^* A$ όπου $A = [a_{ij}]$ με $a_{1j} = a_j$, $1 \leq j \leq n$ και $a_{ij} = 0$ για $i \geq 2$ και $j \geq 1$. Επομένως $C \geq 0$.

Από την άλλη, αν ένα $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$ είναι θετικό, τότε υπάρχει $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$ ώστε $A = B^* B$, δηλαδή $a_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}^* b_{kj}$. Αν λοιπόν θέσουμε $C_k = [b_{ki}^* b_{kj}]$, τότε $A = \sum_{k=1}^n C_k$. \square

Απόδειξη θεωρήματος 1. (1) \Rightarrow (2) Προφανές.

(2) \Rightarrow (3) Θέτω $\mathcal{A} := M_d(\mathbb{C})$. Ο πίνακας

$$[E_{rs}] = \sum_{r,s=1}^d E_{rs} \otimes E_{rs} = \sum_{r,s=1}^d e_r e_s^* \otimes e_r e_s^*$$

είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{A})$, γιατί $[E_{rs}] = uu^*$ όπου $u = \sum_{r=1}^d e_r \otimes e_r^*$.

Συνεπώς, αν η Φ είναι d -θετική, δηλαδή η $\Phi^d : M_d(\mathcal{A}) \rightarrow M_d(\mathcal{B})$ είναι θετική, το $\Phi^d([E_{rs}]) = [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.

(3) \Rightarrow (1) Υποθέτουμε ότι το $[\Phi(E_{rs})]$ ανήκει στον $M_d(\mathcal{B})^+$. Έστω ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να δείξουμε ότι η Φ^n είναι θετική. Αρκεί (δες το Λήμμα 1) να δείξουμε ότι αν $C = [A_i^* A_j] \in M_n(\mathcal{A})$ τότε το $[\Phi(A_i^* A_j)] \in M_n(\mathcal{B})$ είναι θετικό.

Κάθε $A_i \in \mathcal{A} = M_d$ γράφεται $A_i = \sum_{r,s=1}^d a_{rs}^i E_{rs}$. Επομένως

$$A_i^* A_j = \sum_{r,s=1}^d \bar{a}_{rs}^i E_{sr} \sum_{t,u=1}^d a_{tu}^j E_{tu} = \sum_{r,s,u=1}^d \bar{a}_{rs}^i a_{ru}^j E_{su}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \langle \Phi^n([A_i^* A_j])\xi, \xi \rangle_{H^n} &= \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(A_i^* A_j)\xi_j, \xi_i \rangle_H \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s,u=1}^d \bar{a}_{rs}^i a_{ru}^j \langle \Phi(E_{su})\xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \sum_{r,s,u=1}^d \langle \Phi(E_{su}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ru}^j \xi_j \right), \left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_{rs}^i \xi_i \right) \rangle \\ &= \sum_{r=1}^d \left(\sum_{s,u=1}^d \langle \Phi(E_{su})\eta_{ru}, \eta_{rs} \rangle_H \right) \quad (\text{όπου } \eta_{ru} := \sum_{j=1}^n a_{ru}^j \xi_j) \\ &= \sum_r^d \langle [\Phi(E_{su})]\eta_r, \eta_r \rangle_{H^d} \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\eta_r := [\eta_{r1}, \dots, \eta_{rd}]^t$. □

Απόδειξη της διάσπασης Kraus. Θα χρειασθεί μια

Παρατήρηση Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^k$, έστω V^* ο $k \times n$ πίνακας που έχει στήλες τα x_1, x_2, \dots, x_n , δηλαδή

$$V^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k : e_r \rightarrow x_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Τότε

$$\begin{array}{ccccccc} V^* E_{rs} V & : & \mathbb{C}^k & \rightarrow & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^k \\ & & y & \rightarrow & Vy & \rightarrow & \langle Vy, e_s \rangle e_r & \rightarrow & \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r \end{array}$$

Δηλαδή $(V^* E_{rs} V)(y) = \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r = \langle y, V^* e_s \rangle V^* e_r = \langle y, x_s \rangle x_r = (x_r x_s^*)(y)$.

Αν ονομάσουμε v το διάνυσμα στήλη $v = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n)^\dagger \in \mathbb{C}^{nk}$, τότε ο τελεστής $vv^* : \mathbb{C}^{nk} \rightarrow \mathbb{C}^{nk}$ που ανήκει στον $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{nk}) = M_{nk} = M_n(M_k)$ έχει πίνακα $vv^* = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Δηλαδή $[V^* E_{rs} V] = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Έστω λοιπόν ότι η \mathcal{B} ισούται με $M_k(\mathbb{C})$. Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ ικανοποιεί το (3), δηλαδή ότι το $[\Phi(E_{rs})]$ ανήκει στον $M_d(\mathcal{B})^+$, και θα δείξουμε ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $V_1, \dots, V_{kd} \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{dk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}).$$

Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να το δείξουμε για $A = E_{rs}$, $1 \leq r, s \leq n$ (η $\{E_{rs} : 1 \leq r, s \leq n\}$ είναι βάση του γραμμ. χώρου $\mathcal{A} = M_n$).

Αφού ο $B := [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικός στην $M_n(M_k) = M_{nk} = \mathcal{B}(\ell^2[nk])$, από το Φασματικό Θεώρημα (σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) υπάρχει ΟΚ βάση $\{f_j : j = 1, \dots, nk\}$ του $\ell^2[nk]$ από ιδιοδιανύσματα του B με ιδιοτιμές $\lambda_j \geq 0$. Δηλαδή

$$B = \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j f_j f_j^* = \sum_{j=1}^{nk} v_j v_j^* \quad \text{όπου } v_j = \sqrt{\lambda_j} f_j.$$

Από την Παρατήρηση, γράφοντας κάθε $v_j \in \mathbb{C}^{nk}$ ως διάνυσμα στήλη $v_j = (x_1^j \oplus x_2^j \oplus \dots \oplus x_n^j)^\dagger$ με $x_r^j \in \mathbb{C}^k$, έχουμε

$$v_j v_j^* = [x_r^j x_s^{j*}] = [V_j^* E_{rs} V_j]$$

και συνεπώς

$$[\Phi(E_{rs})] = B = \sum_{j=1}^{nk} [V_j^* E_{rs} V_j] \quad \text{άρα}$$

$$\Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* E_{rs} V_j \quad 1 \leq r, s \leq n$$

όπως θέλαμε. □

2 Το Θεώρημα Arveson

Σύστημα τελεστών (operator system) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (ή $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ όπου \mathcal{B} μια C^* άλγεβρα με μονάδα) που είναι αυτοσυζυγής και περιέχει την μονάδα.

Θέτουμε $\mathcal{S}^+ = \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{S}$. Παρατηρείστε ότι ένα σύστημα τελεστών παράγεται από τα θετικά στοιχεία που περιέχει: Κάθε $v \in \mathcal{S}$ γράφεται (μοναδικά) $v = v_1 + iv_2$ όπου τα $v_1 = \frac{1}{2}(v + v^*)$ και $v_2 = \frac{1}{2i}(v - v^*)$ ανήκουν στο \mathcal{S} . Και κάθε αυτοσυζυγές $v \in \mathcal{S}$ γράφεται (όχι μοναδικά) $v = v_p - v_n$ με $v_p, v_n \in \mathcal{S}_+$: πράγματι, $v + \|v\|\mathbf{1} \in \mathcal{S}_+$ και $\|v\|\mathbf{1} - v \in \mathcal{S}_+$.

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B})$ είναι σύστημα τελεστών, αν εφοδιασθεί με την δομή (ενέλιξη, μονάδα και θετικό κώνο $M_n(\mathcal{S})^+ := M_n(\mathcal{B})^+ \cap M_n(\mathcal{S})$) που κληρονομεί από την C^* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B})$.

Αν \mathcal{S}, \mathcal{T} είναι συστήματα τελεστών, μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ λέγεται θετική αν $\varphi(\mathcal{S}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$ και πλήρως θετική αν για κάθε n η απεικόνιση $\varphi^n : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow M_n(\mathcal{T}) : [x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$ είναι θετική.

Συμβολισμοί. Αν \mathcal{S} είναι σύστημα τελεστών και $\phi : \mathcal{S} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ γραμμική, ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $s_\phi : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{C}$ ως εξής:

$$s_\phi(A) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(a_{i,j}) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]}, \quad A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S})$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^n$ η κανονική βάση του $\ell^2[n]$.

Ισοδύναμα, θέτοντας $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus \dots \oplus e_n) \in \ell^2[n^2]$, έχουμε, για κάθε $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S})$

$$s_\phi(A) = \langle \phi^{(n)}(A) x_0, x_0 \rangle_{\ell^2[n^2]} = \langle [\phi(a_{i,j})] x_0, x_0 \rangle_{\ell^2[n^2]},$$

όπου $\phi^{(n)}(A) = [\phi(a_{i,j})] \in M_n(M_n(\mathbb{C}))$.

Προφανώς η απεικόνιση $\phi \mapsto s_\phi : \mathcal{L}(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$ είναι γραμμική.

Τέλος, αν $s : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική, ορίζουμε $\phi_s : \mathcal{S} \rightarrow M_n$ ως εξής

$$\langle \phi_s(a) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = (\phi_s(a))_{(i,j)} = ns(a \otimes E_{i,j}), \quad a \in \mathcal{S}$$

$$\text{δηλ. } \phi_s(a) = \sum_{i,j=1}^n ns(a \otimes E_{i,j}) E_{ij}$$

όπου $a \otimes E_{i,j}$ το στοιχείο του $M_n(\mathcal{S})$ που έχει στην (i, j) -θέση το a και 0 αλλού.

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις $\phi \mapsto s_\phi$ και $s \mapsto \phi_s$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης:

Έστω $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C}))$ και $s \in \mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι $s_{\phi_s} = s$ και $\phi_{s_\phi} = \phi$. Παίρνουμε $[a_{i,j}] \in$

$M_n(\mathcal{S})$ και υπολογίζουμε

$$s_{\phi_s}([a_{k,l}]) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \langle \phi_s(a_{i,j})e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n ns(a_{i,j} \otimes E_{i,j}) = s([a_{k,l}]).$$

Επίσης, για κάθε $a \in \mathcal{S}$ και για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ έχουμε

$$(\phi_{s_\phi}(a))_{(i,j)} = ns_\phi(a \otimes E_{i,j}) = n \frac{1}{n} \langle \phi_s(a)e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = (\phi(a))_{(i,j)},$$

άρα έχουμε τα ζητούμενα.

Θεώρημα 2 (Arveson correspondence). Έστω \mathcal{S} ένα σύστημα τελεστών, $n \in \mathbb{N}$ και $\phi : \mathcal{S} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

- (1) $H\phi : \mathcal{S} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.
- (2) $H\phi : \mathcal{S} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ είναι n -θετική.
- (3) $Hs_\phi : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετική.

Απόδειξη. (1) \Rightarrow (2) Προφανές.

(2) \Rightarrow (3) : Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι n -θετική, δηλαδή η $\phi^{(n)} : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow M_n(M_n(\mathbb{C})) = M_{n^2}(\mathbb{C})$ στέλνει τον $M_n(\mathcal{S})^+$ στον $M_{n^2}(\mathbb{C})^+$. Έστω $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{S})^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι $s(A) \in \mathbb{R}^+$.

Από την υπόθεση έχουμε $\phi^{(n)}(A) \in M_{n^2}(\mathbb{C})^+ = \mathcal{B}(\ell^2[n^2])^+$, οπότε $\langle \phi^{(n)}(A)y, y \rangle \geq 0$ για κάθε $y \in \ell^2[n^2]$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα αυτή στο διάνυσμα $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus \dots \oplus e_n) \in \ell^2[n^2]$, βρίσκουμε (παρατηρώντας ότι $s = s_\phi$ εφόσον $\phi = \phi_s$)

$$s(A) = s_\phi(A) = \langle \phi^{(n)}(A)x_0, x_0 \rangle \geq 0$$

όπως θέλαμε.

(3) \Rightarrow (1) : Υποθέτουμε ότι $s(Y) \geq 0$ για κάθε $Y \in M_n(\mathcal{S})^+$.

Για να δείξουμε ότι η ϕ είναι πλήρως θετική, αν δοθεί $m \in \mathbb{N}$ πρέπει να δείξουμε ότι η $\phi^{(m)} : M_m(\mathcal{S}) \rightarrow M_m(M_n(\mathbb{C}))$ είναι θετική. Δηλαδή, για κάθε $X = [x_{ij}] \in M_m(\mathcal{S})^+$, πρέπει να δείξουμε ότι το $\phi^{(m)}([x_{ij}]) \in M_m(M_n(\mathbb{C}))$ είναι θετικός $mn \times mn$ πίνακας. Έχουμε $\phi^{(m)}([x_{ij}]) = [\phi(x_{ij})]$. Για κάθε διάνυσμα-στήλη $\xi \in \ell^2[mn]$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\langle [\phi(x_{ij})]\xi, \xi \rangle_{\ell^2[mn]} \geq 0.$$

Γράφουμε το $\xi \in \ell^2[mn]$ ως μια m -στήλη $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1^t \\ \vdots \\ \xi_m^t \end{bmatrix}$ από n -στήλες, όπου ο δείκτης t συμβολίζει τον

ανάστροφο και κάθε $\xi_j := [\xi_j(1), \dots, \xi_j(n)]$ είναι διάνυσμα γραμμή στον $\ell^2[n]$. Αν θυμηθούμε ότι ο $[\phi(x_{ij})]$ είναι $m \times m$ (block) πίνακας με στοιχεία $\phi(x_{ij})$ από την $M_n(\mathbb{C})$,¹ έχουμε

$$\langle [\phi(x_{ij})]\xi, \xi \rangle_{\ell^2[mn]} = \sum_{i,j=1}^m \langle \phi(x_{ij})\xi_j^t, \xi_j^t \rangle_{\ell^2[n]} \stackrel{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^m ns(\xi_i^* x_{ij} \xi_j).$$

Η ισότητα (*) προκύπτει από την ακόλουθη Παρατήρηση:

¹Για παράδειγμα, αν $m = 3$:

$$\phi^{(3)}([x_{kl}]) = [\phi(x_{kl})] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{κάθε } A_{kl} = \phi(x_{kl}) \in M_n(\mathbb{C})).$$

Παρατήρηση. Αν $h = [h_1, \dots, h_n]$ and $k = [k_1, \dots, k_n]$ είναι στον $\ell^2[n]$, για κάθε $x \in \mathcal{S}$ έχουμε, εφόσον $\phi(x) \in \mathcal{B}(\ell^2[n])$,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)h^t, k^t \rangle_{\ell^2[n]} &= \langle \phi(x) \sum_j h_j e_j, \sum_i k_i e_i \rangle_{\ell^2[n]} = \sum_{i,j=1}^n h_j \bar{k}_i \langle \phi(x)e_j, e_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(\bar{k}_i v h_j) e_j, e_i \rangle \quad (\text{κάθε } \phi(\bar{k}_i v h_j) \in M_n(\mathbb{C})) \\ &= ns([\bar{k}_i v h_j]) = ns(k^* v h) \end{aligned}$$

όπου k^* είναι το διάνυσμα-στήλη $[\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n]^t$, οπότε το $k^* x h \in M_n(\mathcal{S})$ είναι ο πίνακας με i, j συντεταγμένη $[\bar{k}_i x h_j]$.²

Έχουμε λοιπόν

$$\langle [\phi(x_{ij})\xi, \xi]_{\ell^2[mm]} \rangle = \sum_{i,j=1}^m ns(\xi_i^* x_{ij} \xi_j) = ns \left(\sum_{i,j=1}^m \xi_i^* x_{ij} \xi_j \right).$$

Όμως, αν ονομάσουμε $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \xi_1(1) & \dots & \xi_1(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_m(n) & \dots & \xi_m(n) \end{bmatrix}$ που οι m γραμμές του είναι

τα διανύσματα ξ_1, \dots, ξ_m (θυμόμαστε ότι κάθε ξ_j είναι στον $\ell^2[n]$), τότε το $\sum_{i,j=1}^m \xi_i^* x_{ij} \xi_j \in M_n(\mathcal{S})$ είναι το γινόμενο πινάκων $A^* X A$. Εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in M_m(\mathcal{S})^+$, έπεται ότι $A^* X A \in M_n(\mathcal{S})^+$, και άρα το $ns(A^* X A)$ είναι μη αρνητικό.

Δεύτερη απόδειξη της (3) \Rightarrow (1): Υποθέτουμε ότι $s(Y) \geq 0$ για κάθε $Y \in M_n(\mathcal{S})^+$. Αν \mathcal{A} είναι C^* -άλγεβρα με μονάδα που περιέχει το \mathcal{S} , τότε το $M_n(\mathcal{S})$ είναι σύστημα τελεστών στην C^* -άλγεβρα $\mathcal{B} := M_n(\mathcal{A})$ και η $s : M_n(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετική. Από το Θεώρημα επέκτασης του Krein (!) (δείτε αργότερα) η s : επεκτείνεται σε μια θετική γραμμική μορφή $\tilde{s} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$.

Συμβολίζουμε (π, H, ξ) την τριάδα GNS που αντιστοιχεί στην \tilde{s} , οπότε

$$\tilde{s}(A) = \langle \pi(A)\xi, \xi \rangle \quad \forall A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A}).$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$V : \ell^2[n] \rightarrow H : e_j \mapsto \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1j})\xi.$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\phi(a) = \frac{1}{n} V^* \pi(a \otimes I_n) V \quad \forall a \in \mathcal{S}.$$

Πράγματι, για κάθε $i, j \in [n]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle V^* \pi(a \otimes I_n) V e_j, e_i \rangle &= \langle \pi(a \otimes I_n) V e_j, V e_i \rangle \\ &= \langle \pi(a \otimes I_n) \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1j})\xi, \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})\xi \rangle \\ &= \langle \pi(a \otimes E_{1j})\xi, \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})\xi \rangle \\ &= \langle \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})^* \pi(a \otimes E_{1j})\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi((\mathbf{1} \otimes E_{i1})(a \otimes E_{1j}))\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi(a \otimes E_{ij})\xi, \xi \rangle \\ &= \tilde{s}(a \otimes E_{ij}) = s(a \otimes E_{ij}) = n \langle \phi(a) e_j, e_i \rangle \end{aligned}$$

για κάθε $i, j \in [n]$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Δείξαμε λοιπόν ότι η ϕ είναι η σύνθεση των πλήρως θετικών απεικονίσεων $a \mapsto a \otimes I_n \mapsto \pi(a \otimes I_n) \mapsto \frac{1}{n} V^* \pi(a \otimes I_n) V$, άρα είναι πλήρως θετική. \square

²Για παράδειγμα, αν $n=2$

$$[\bar{k}_i x h_j] = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 x h_1 & \bar{k}_1 x h_2 \\ \bar{k}_2 x h_1 & \bar{k}_2 x h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

που είναι $(n \times 1)(1 \times 1)(1 \times n)$