Θεώρημα Stinespring

Θεώρημα 1 (Stinespring)**.** *Για κάθε πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι φραγμένος τελεστής ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & \mathcal{B}(H) \\
& \mathcal{B}(K) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{ad}\, V^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη

1. Για να φτιάξουμε τον χώρο Hilbert H_ϕ, θεωρούμε πρώτα τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A} \otimes H$.

   Γράφω για συντομία $\widetilde{\mathcal{A}}$ αντί για $\mathcal{A} \otimes H$.

   [Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{A}$.]

2. Ορίζουμε την απεικόνιση
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_o : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$$
   ως εξής: θέτουμε $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_o := \langle \Phi(b^*a)\xi, \eta \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή
$$\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{M} b_m \otimes \eta_m \rangle_o := \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a_n)\xi_n, \eta_m \rangle_H \,.$$
   Προφανώς η $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι sesquilinear.

   [Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_o = \Phi(b^*a)$.]

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι για κάθε $\vec{b} = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$,
$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o = \langle \sum_{n=1}^{N} b_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} b_m \otimes \xi_m \rangle_o \geqslant 0.$$
   Πράγματι αν $X := [b_m^* b_n] \in M_N(\mathcal{A})$, έχουμε $[\Phi(b_m^* b_n)] = \Phi_N(X) \in \mathcal{B}(H^N)$ και
$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o := \sum_{n,m} \langle b_n \otimes \xi_n, b_m \xi_m \rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* b_n)\xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(X)\vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \tag{†}$$
   όπου $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N]^\dagger$. Όμως ο πίνακας X παραγοντοποιείται
$$X = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \ldots & 0 \\ b_2^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_N \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = B^*B$$

άρα είναι θετικός, οπότε (αφού η Φ_N είαι θετική απεικόνιση) ο $\Phi_N(X)$ είναι θετικός και άρα $\langle \Phi_N(X)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \geqslant 0$.

Άρα το $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι ημιεσωτερικό γινόμενο.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\langle \vec{u}, \vec{a}\rangle_o|^2 \leqslant \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle_o \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle_o$ έπεται ότι

$$\{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle_o = 0\} = \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{a}\rangle_o = 0 \ \forall \vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$$

και συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle_o = 0\}$$

είναι γραμμικός χώρος.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := (\mathcal{A} \otimes H)/\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$. Ο χώρος $H_{0\phi}$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο $\langle [\vec{a}], [\vec{b}]\rangle_\phi := \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle_o$ (όπου γράφουμε $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
   Ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle_o}$.
   [Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.]

5. Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$

$$\text{δηλαδή } \ \pi_0(a)\left(\sum_n b_n \otimes \xi_n\right) := \sum_n ab_n \otimes \xi_n \quad (a \in \mathcal{A},\ \vec{b} = \sum_n b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}.)$$

[Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\pi_0(a)(b) = ab$.]

Ισχυρισμός. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} = \sum_n b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ έχουμε

$$\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o \leqslant \|a^*a\| \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_0 .$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \sum_{n,m} \langle ab_n \otimes \xi_n, ab_m \otimes \xi_m\rangle_o \\
&= \sum_{n,m} \langle \Phi((ab_m)^*(ab_n))\xi_n, \xi_m\rangle_H \\
&= \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a^* ab_n)\xi_n, \xi_m\rangle_H = \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \qquad (*)
\end{aligned}$$

όπου $Y = [b_m^* a^* ab_n] \in M_N(\mathcal{A})$, οπότε $[\Phi(b_m^* a^* ab_n)] = \Phi_N(Y) \in \mathcal{B}(H^N)$.

Ο πίνακας Y παραγοντοποιείται

$$Y = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \dots & 0 \\ b_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a^*a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a^*a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} := B^*CB .$$

Παρατηρούμε ότι $Y \leqslant \|C\| \, B^*B$.

Πράγματι, αναπαριστώντας την C* άλγεβρα $M_N(\mathcal{A})$ ως τελεστές που δρουν σ' έναν χώρο Hilbert K (Θεώρημα Gelfand-Naimark), [1] για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle B^*CBx, x\rangle = \langle CBx, Bx\rangle \leqslant \|C\| \, \|Bx\|^2 = \|C\| \, \langle B^*Bx, x\rangle = \langle (\|C\| \, B^*B)x, x\rangle \, .$$

Επομένως, εφαρμόζοντας στην ανισότητα $Y \leqslant \|C\| \, B^*B$ την θετική απεικόνιση Φ_N, προκύπτει ότι

$$\Phi_N(Y) \leqslant \|C\| \, \Phi_N(B^*B) \, .$$

Όμως $C = \text{diag}(a^*a)$ και συνεπώς $\|C\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην $(*)$ έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \leqslant \langle \|C\| \, \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \\ &= \|a\|^2 \, \langle \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \stackrel{(\dagger)}{=} \|a\|^2 \, \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o \end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

6. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αν $\vec{u} \in \mathcal{N}$ τότε $0 \leqslant \langle \pi_0(a)\vec{u}, \pi_0(a)\vec{u}\rangle_o \leqslant \|a^*a\| \, \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle_o = 0$). Επομένως ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον χώρο πηλίκο $H_{o\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] = [ab \otimes \xi] \quad (b \in \mathcal{A}, \xi \in H).$$

7. Πάλι από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leqslant \|a\| \, \|[\vec{b}]\|_\phi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Πράγματι,

$$\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi = \|\pi_0(a)\vec{b}\|_o \leqslant \|a\| \, \|\vec{b}\|_o = \|a\| \, \|[\vec{b}]\|_\phi \, .$$

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi) \, .$$

Δείχνουμε ότι η π_ϕ είναι *-αναπαράσταση:

(α) Έστω $a, a' \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $b \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_\phi(a + \lambda a')[b \otimes \xi] &= \pi_1(a + \lambda a')[b \otimes \xi] = [((a + \lambda a')b) \otimes \xi] \\ &= [(ab + \lambda a'b) \otimes \xi] = [ab \otimes \xi] + \lambda[a'b \otimes \xi] \\ &= \pi_\phi(a)[b \otimes \xi] + \lambda\pi_\phi(a')[b \otimes \xi] \\ &= (\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a'))[b \otimes \xi] \, . \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $[\vec{b}] = [\sum_n b_n \otimes \xi_n] \in \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ έχουμε

$$\pi_\phi(a + \lambda a')[\vec{b}] = (\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a'))[\vec{b}]$$

[1] Άλλος τρόπος: επειδή $0 \leqslant C \leqslant \|C\| \mathbf{1}$, θέτοντας $D := (\|C\| \mathbf{1} - C)^{1/2}$ έχουμε $B^*(\|C\| \mathbf{1} - C)B = B^*D^*DB = (DB)^*DB \geqslant 0$, δηλαδή $B^* \|C\| B \geqslant B^*CB$.

λόγω γραμμικότητας των $\pi_\phi(a+\lambda a')$ και $\pi_\phi(a)+\lambda\pi_\phi(a')$ και άρα, αφού οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς και ο $H_{0\phi}$ είναι πυκνός στον H_ϕ,

$$\pi_\phi(a+\lambda a') = \pi_\phi(a)+\lambda\pi_\phi(a')\,.$$

(β) Ομοίως, για να δείξουμε ότι

$$\pi_\phi(aa') = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')$$

για κάθε $a, a' \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα

$$\pi_\phi(aa')[b\otimes\xi] = \pi_\phi(a)(\pi_\phi(a')[b\otimes\xi])$$

για κάθε $b\in\mathcal{A}$ και $\xi\in H$, η οποία ισχύει γιατί

$$\pi_\phi(aa')[b\otimes\xi] = [(aa')b\otimes\xi] = [a(a'b)\otimes\xi] = \pi_\phi(a)[(a'b)\otimes\xi] = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')[b\otimes\xi]\,.$$

(γ) Δείχνουμε τέλος ότι $(\pi_\phi(a))^* = \pi_\phi(a^*)$ για κάθε $a\in\mathcal{A}$:

Αν $b, c\in\mathcal{A}$ και $\xi,\eta\in H$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle(\pi_\phi(a))^*[b\otimes\xi],[c\otimes\eta]\rangle_\phi &= \langle[b\otimes\xi],\pi_\phi(a)[c\otimes\eta]\rangle_\phi = \langle[b\otimes\xi],[ac\otimes\eta]\rangle_\phi\\
&= \langle b\otimes\xi, ac\otimes\eta\rangle_o\\
&= \langle\Phi((ac)^*b)\xi,\eta\rangle_H = \langle\Phi(c^*(a^*b))\xi,\eta\rangle_H\\
&= \langle(a^*b)\otimes\xi, c\otimes\eta\rangle_o = \langle[a^*b\otimes\xi],[c\otimes\eta]\rangle_\phi\\
&= \langle\pi_\phi(a^*)[b\otimes\xi],[c\otimes\eta]\rangle_\phi
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των $(\pi_\phi(a))^*$ και $\pi_\phi(a^*)$ έπεται ότι για κάθε $[\vec{b}],[\vec{c}]\in\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ θα έχουμε

$$\langle(\pi_\phi(a))^*[\vec{b}],[\vec{c}]\rangle_\phi = \langle\pi_\phi(a^*)[\vec{b}],[\vec{c}]\rangle_\phi$$

και επομένως, λόγω συνέχειας των τελεστών αυτών έπεται ότι θα ταυτίζονται και στον H_ϕ.

8. Ορίζουμε

$$V: H\to\widetilde{\mathcal{A}}\to H_\phi : \xi\to\mathbf{1}_\mathcal{A}\otimes\xi\to[\mathbf{1}_\mathcal{A}\otimes\xi]\,.$$

Για κάθε $\xi\in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|V\xi\|^2_{H_\phi} &= \langle[\mathbf{1}\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\xi]\rangle_\phi\\
&= \langle\Phi(\mathbf{1}^*\mathbf{1})\xi,\xi\rangle_H\\
&\leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\|\,\|\xi\|^2_H
\end{aligned}$$

δηλαδή η V είναι φραγμένη. Τέλος, για κάθε $\xi,\eta\in H$,

$$\begin{aligned}
\langle(V^*\pi(a)V)\xi,\eta\rangle_H &= \langle\pi(a)V\xi,V\eta\rangle_{H_\phi} = \langle\pi(a)[\mathbf{1}\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\eta]\rangle_{H_\phi}\\
&= \langle[a\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\eta]\rangle_{H_\phi} = \langle\Phi(\mathbf{1}^*a)\xi,\eta\rangle_H
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$V^*\pi(a)V = \Phi(a)\,. \qquad \square$$