ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

(παράδοση 1/11/2020)

Άσκηση 1. *Αν X είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff (θεωρείστε τον μετρικό, αν προτιμάτε) δείξτε ότι η άλγεβρα $C_0(X)$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο X είναι συμπαγής.*

Άσκηση 2. *Αν H είναι ο χώρος Hilbert $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$ (έχει ορθοκανονική βάση $\{\delta_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$), δείξτε ότι για κάθε $f \in C([0,1])$ η σχέση*

$$\pi_2(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t) \quad \text{για κάθε } \xi \in H \text{ και } \ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

ορίζει φραγμένο τελεστή $\pi_2(f) : H \to H$ και βρείτε τη νόρμα του.

Άσκηση 3. *Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου (θεωρείστε τον $\mathbb{R}$ με το μέτρο Lebesgue αν προτιμάτε). Αν $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα:*
υπάρχει σταθερά C_f ώστε $\|fg\|_2 \leqslant C_f \|g\|_2$ για κάθε $g \in L^2(X, \mu)$,
τότε η f είναι ουσιωδώς φραγμένη. [1]

Άσκηση 4. *Αν E είναι ο χώρος Banach $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $L : E \to E$ είναι η απεικόνιση $(Lg)(t) = tg(t)$ $(g \in E)$ δείξτε ότι $\sigma_p(L) = \emptyset$ και ότι $\sigma(L) = [0,1]$.*

Γενικότερα, αν $f \in C([0,1]$ και $L_f : E \to E$ είναι η απεικόνιση $L_f g = fg$ $(g \in E)$ δείξτε ότι $\sigma(L_f) = f([0,1]) = \sigma(f)$ (όπου $\sigma(f)$ το φάσμα της f στην C άλγεβρα $C([0,1])$.*

Άσκηση 5. *Αν $H = L^2([0,1])$ (μέτρο Lebesgue) και $M : H \to H$ ο τελεστής $(Mg)(t) = tg(t)$ $(g \in H)$ δείξτε ότι $\sigma_p(M) = \emptyset$ και ότι $\sigma(M) = [0,1]$.*

Γενικότερα, αν $f \in C([0,1]$ και $M_f : H \to H$ είναι η απεικόνιση $M_f g = fg$ $(g \in H)$ δείξτε ότι $\sigma(M_f) = f([0,1])$.

---

[1] Ευχαριστώ, Μ.Α.