Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις I

$f \in C(X)$ ... $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K = X$?? ώστε $\forall x \notin X$ $|f(x)| < \varepsilon$

Σπυρίδων Πετράκος

3 Νοεμβρίου 2020

X συμπ $\Downarrow$ $C_0(X) = C(X)$

Άσκηση 1. Αν ο X είναι συμπαγής, τότε η $C_0(X)$ ταυτίζεται με την $C(X)$ η οποία έχει μονάδα την σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1} \equiv 1$ (αφού αυτή είναι πάντα συνεχής). Αντίστροφα, έστω ότι η $C_0(X)$ έχει μονάδα $\mathbb{1}$. Έστω ακόμη $x \in X$ και K συμπαγής γειτονιά του. Από το λήμμα του Urysohn για τοπικά συμπαγείς χώρους Hausdorff, υπάρχει f συνεχής με $f(x) = 1$ και $\mathsf{supp}(f) \subseteq K$ (άρα $f \in C_0(X)$). Επειδή $\mathbb{1}f = f$ και το x ήταν τυχόν, θα πρέπει $\mathbb{1} \equiv 1$. Αλλά κάθε μη-μηδενική σταθερή συνάρτηση c ανήκει στην $C_0(X)$ ανν ο X είναι συμπαγής (αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < |c|$, τότε $[|c| < \varepsilon] = \emptyset$), δηλαδή το ζητούμενο.

$\mathbb{1}(x) f(x) = f(x)$ $\Downarrow$ $\mathbb{1}(x) = 1$ άρα $\mathbb{1} \equiv 1$

Άσκηση 2. Η δοθείσα σχέση είναι προφανώς γραμμική, οπότε μένει να ελέγξουμε ότι ο τελεστής που ορίζει είναι καλά ορισμένος και συνεχής. Παρατηρούμε ότι $\|\pi_2(f)(\xi)\|_2 \le \|f\|_\infty \|\xi\|_2 < \infty$, άρα ο $\pi_2(f)$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος με $\|\pi_2(f)\| \le \|f\|_\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\exists t \in [0,1] : |f(t)| = \|f\|_\infty$ και από συνέχεια της f, $\exists q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : |f(q)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. Άρα $\|\pi_2(f)(\delta_q)\|_2 = |f(q)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon \Rightarrow \|\pi_2(f)\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. Το ε ήταν τυχόν, άρα $\|\pi_2(f)\| \ge \|f\|_\infty$ και επομένως έχουμε ισότητα.

$B_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$, $\mu(B_n) > 0$

Άσκηση 3. Έστω ότι η f δεν είναι ουσιωδώς φραγμένη. Τότε $\forall n \in \mathbb{N} : \mu([|f| > n]) > 0$. Επειδή το μ είναι σ-πεπερασμένο, $\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n \subseteq [|f| > n] : 0 < \mu(A_n) < \infty$. Έστω $g_n = \chi_{A_n}$. Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N} : g_n \in L^2(X, \mu)$ και $\forall n \in \mathbb{N} : n\mu(A_n) \le \|fg_n\|_2 \le C_f \|g_n\|_2 = C_f \mu(A_n) \Rightarrow n \le C_f$, άτοπο, αφού C_f σταθερά.

$\exists A_n \subseteq B_n$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, $\chi_{A_n} \in L^2$

$Lg(t) = t g(t)$ $\forall g \in C[0,1]$

Άσκηση 4. Έχουμε $(\lambda - t)g(t) = 0 \Rightarrow g([0,1] \setminus \{\lambda\}) = \{0\} \Rightarrow g \equiv 0$ λόγω συνέχειας, άρα $\sigma_p(L) = \emptyset$. Έστω τώρα $f \in C([0,1])$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν ο $\lambda\mathbb{1} - L_f$ είναι αντιστρέψιμος, τότε είναι και επί, άρα υπάρχει $g \in C([0,1])$ με $(\lambda - f(t))g(t) = 1\ \forall t$, άρα $\lambda - f(t) \ne 0\ \forall t \Rightarrow \lambda \notin f([0,1])$ (και η $\lambda\mathbf{1} - f$ έχει αντίστροφο στην άλγεβρα $C([0,1]) \Rightarrow \lambda \in \sigma(f)$). Αντίστροφα, αν $\lambda \notin$

$n\sqrt{\mu(A_n)} \le \|fg_n\|_2 \le C_f \|g_n\| = C_f \sqrt{\mu(A_n)}$

$\|g_n\|_2^2 = \int_{A_n} |\chi_{A_n}|^2 d\mu = \int \chi_{A_n} d\mu = \mu(A_n)$

$\|g_n\|_2 = \sqrt{\mu(A_n)}$

$(\lambda - t) g(t) = 0\ \forall t \Rightarrow g(t) = 0\ \forall t \ne \lambda$

$\{|f|>1\}$ $\qquad |f|>2$

$f([0,1])$, εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{1}{\lambda\mathbf{1}-f} = h \in C([0,1])$ και $L_f L_h = L_h L_f = \mathbb{1}$ (και φυσικά $fh = hf \equiv 1$). Άρα $\sigma(L_f) = f([0,1])(=\sigma(f))$.

Άσκηση 5. Επειδή $\lambda - t \neq 0$ σ.π. $\forall \lambda$, έχουμε $(\lambda\mathbb{1} - M)(g) = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ σ.π., άρα $\sigma_p(M) = \emptyset$. Έστω τώρα $f \in C([0,1]), \lambda \in f([0,1]), t \in f^{-1}(\{\lambda\})$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω συνέχειας, υπάρχει περιοχή U του t με $|\lambda - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in U$. Έστω $T : H \to H$ με $T(\lambda\mathbb{1} - M_f) = \mathbb{1}$ και $g = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu(U)}}\chi_U \in H$. Τότε $\|(\lambda\mathbf{1} - f)g\|_2 \leq 1$ και $\|T((\lambda\mathbf{1} - f)g)\|_2 = \|T(\lambda\mathbb{1} - M_f)g\|_2 = \|g\|_2 = \frac{1}{\varepsilon}$. Εφόσον το ε ήταν τυχόν, ο T δεν είναι φραγμένος, άρα ο $\lambda\mathbb{1} - M_f$ δεν αντιστρέφεται. Αντίστροφα, αν $\lambda \notin f([0,1])$, όπως στην προηγούμενη άσκηση, είναι εύκολο να δούμε ότι ο $\lambda\mathbb{1} - M_f$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή τελικά $\sigma(M_f) = f([0,1])$.

$\exists C_f : \forall g \in L^2(\mu) : \|fg\|_2 \leq C_f \|g\|$

Ερώτηση εκτός προγράμματος (*Στην άσκηση 3 μας αρκεί* $\|fg\|_2 < \infty\ \forall g \in L^2(X,\mu)$). Έστω $A_n = [n \leq |f| < n+1]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Αν η f δεν είναι ουσιωδώς φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία $(A_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $\mu(A_{k_n}) > 0$. Επιλέγουμε $B_{k_n} \subseteq A_{k_n}$ θετικού πεπερασμένου μέτρου και ορίζουμε $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\mu(B_{k_n})}}\chi_{B_{k_n}}$. Τότε έχουμε $\|g\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} < \infty$ ενώ $\int |fg|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{k_n}} \frac{|f|^2}{n^2\mu(B_{k_n})} d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{k_n}} \frac{n^2}{n^2\mu(B_{k_n})} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$.

$\forall g \in L^2 \quad fg \in L^2$ δηλ. $\|fg\|_2 < +\infty$

$\Longrightarrow f$ ουσιωδώς φραγμ.

Αλλιώς

θεωρώ τη $M_f : L^2 \longrightarrow L^2$ (πλήρεις χώροι)

$g \longmapsto fg$

υπόθεση! ορίζεται!

προφανώς γραμμική

Ισχύει M_f φραγμ.

(οπότε $\forall g$ θα έχω

$\|fg\|_2 \leq \|M_f\| \, \|g\|_2$, $\|M_f\| = C_f$

Αρκεί να δω $Gr(M_f)$ κλειστό

δηλ. αν (g_n) του L^2 με $g_n \xrightarrow{\|\ \|_2} g$

$M_f g_n \xrightarrow{\|\ \|_2} h$

και $h = M_f g$ (ισοδύναμα αν $g_n \longrightarrow 0$

αν $M_f g_n \longrightarrow k \Rightarrow k = 0$

$\forall \xi \in L^2: \quad \langle k, \xi \rangle = \lim_n \langle M_f g_n, \xi \rangle$

$= \lim_n \langle g_n, \bar{f} \xi \rangle = 0.$

$\Rightarrow k = 0$ στο L^2

(χρησιμοποιούμε ότι $\bar{f}\xi \in L^2$

διότι $\xi \in L^2$ και $\bar{\xi} \in L^2$

$\int |\bar{\xi}|^2 d\mu = \int |\xi|^2 d\mu$

όπως από την υπόθεση:

$f\bar{\xi} \in L^2$

$\Downarrow$

$\bar{f}\xi \in L^2$

$\sum_{a \in \Gamma} |\xi(a)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi(q_n)|^2$

$\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi(k)|^2}$

$e_n = \{ 1$ στην n-θέση

$e_n(t) = \begin{cases} 1, & t = q_n \\ 0, & t \neq q_n \end{cases}$

$= \delta_{q_n}$

$\{ \delta_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \}$ είναι ον βάση του $\ell^2(\Gamma)$

Ορίζουμε $\forall f \in C([0,1])$

$\big(\Pi_2(f)\xi\big)(t) = f(t)\xi(t) \quad \forall \xi \in \ell^2(\Gamma)$
$\forall t \in \Gamma$

Καλά ορισμένο: $\forall \xi \in \ell^2(\Gamma)$

$\Pi_2(f)\xi \in \ell^2(\Gamma)$

$\underbrace{\|\Pi_2(f)\xi\|_2^2}_{\in \ell^2} = \sum_{t \in \Gamma} \big|\big(\Pi_2(f)\xi\big)(t)\big|^2$

$= \sum_{t \in \Gamma} |f(t)\xi(t)|^2$

$=$

$f \in C([0,1])$ άρα φραγμ., έχει $\|f\|_\infty < +\infty$

$$\le \|f\|_\infty^2 \sum |\xi(t)|^2$$
$$= \|f\|_\infty^2 \|\xi\|_2^2 < +\infty \quad \forall \xi$$

- καλά ορισμένος
- $\|\Pi_2(f)\| \le \|f\|_\infty$

Όμως, $\forall s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$

$$(\Pi_2(f)\delta_s)(t) = f(t)\underbrace{\delta_s(t)}_{\substack{0 \text{ αν } t \neq s \\ 1 \text{ αν } t = s}} = \begin{cases} f(s), & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\|\Pi_2(f)\delta_s\|_{\ell^2} \ge |f(s)|$$
$$\Rightarrow \|\Pi_2(f)\| \ge |f(s)| \ \forall s$$
$$\ge \|f\|_\infty$$

Χρησιμοποιείται: Θεωρ. Κλ. Γραφ.:

E, F : χώροι Banach

και $T : E \to F$ γραμμικός

και T έχει κλειστό γράφημα

τότε T φραγμ. τελεστής

Θεώρημα Hellinger-Toeplitz:

Αν E, F : χώροι Hilbert και $T : E \to F$ γραμμική και $\exists\, S : F \to E$ ώστε

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, S\eta \rangle \quad \forall \xi \in E, \eta \in F$$

$\Rightarrow T$ φραγμ., S φραγμ. και $S = T^*$

Απόδ. νδο Αν $\xi_n \to 0$ και $T\xi_n \to \xi'$ τότε $\xi' = 0$

πράγματι, $\forall \eta \in F$

$$\langle \xi', \eta \rangle = \lim_n \langle T\xi_n, \eta \rangle \overset{\text{υπόθ}}{=} \lim_n \underbrace{\langle \xi_n, S\eta \rangle}_{\to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \xi' = 0$$

$f \in C([0,1])$

δρα σαν χώρο Banach

$$E = (C[0,1], \|\ \|_\infty)$$

$L_f \in \mathcal{B}(E) : L_f g = fg$ κατά σημείο

$$\sigma(L_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \underline{\lambda I - L_f} \notin Inv(\mathcal{B}(E))\}$$

$\iff \nexists\ T \in \mathcal{B}(E)$ με

$$T(\lambda I - L_f) = I$$
$$(\lambda I - L_f)T = I$$

Όμως, $C([0,1])$ είναι άλγεβρα Banach

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda 1 - \underline{f}) \notin Inv(C[0,1])\}$$

από την άσκηση δίνεται :

$$\underline{\underline{\sigma(f)}} = f([0,1]) = \underline{\underline{\sigma(L_f)}}$$

$H = L^2([0,1], m)$

$M : H \to H$

$g \longmapsto Mg \qquad (Mg)(t) = t\,g(t)$ σχ $\forall t$

$\sigma_p(M) = ?$

$\lambda \in \mathbb{C}: \quad (\lambda I - M)$ 1-1 ;;

$$\big((\lambda I - M)g\big)(t) = (\lambda - t)\,g(t)$$

$= 0$

αν

δηλαδή $(\lambda - t)\,g(t) = 0$ σχεδόν $\forall t$

$\Downarrow$?

$g(t) = 0$

$g(t) = 0$ σχεδόν $\forall\, t \neq \lambda$

$$m(\{t \in [0,1] \setminus \{\lambda\} : g(t) \neq 0\}) = 0$$

$\longrightarrow$ όμως $m(\{\lambda\}) = 0$ (μέτρο Lebesgue!)

$\Rightarrow m(\{t \in [0,1] : g(t) \neq 0\}) = 0$

άρα $g(t) = 0$ σ.π.