ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ III

(παράδοση 14 Δεκεμβρίου)

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια C* υπάλγεβρα και $A \in \mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι ο H έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι $A = A^*$ και $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+$ αν-ν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο πίνακας $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ (όπου $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$) είναι θετικά ημιορισμένος, δηλαδή ικανοποιεί*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} x_j \geqslant 0 \text{ για κάθε } x_i \in \mathbb{C}\,.$$

Άσκηση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα και $a = a^* \in \mathcal{A}$. Αν $f \in C(\sigma(a))$, έχουμε $f(a) \geqslant 0$ αν και μόνον αν $f \geqslant 0$, δηλαδή $f(\lambda) \geqslant 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$.*

Άσκηση 3. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ C* άλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \to A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$.*

Άσκηση 4. *Κάθε θετική γραμμική μορφή σε μια C* άλγεβρα χωρίς μονάδα επεκτείνεται σε θετική γραμμική μορφή στη μοναδοποίηση.*

Άσκηση 5. *Αν $\mathcal{A}_0 = C_c(\mathbb{R})$ (με πράξεις και ενέλιξη κατά σημείο και νόρμα supremum) και*

$$\omega(a) = \int_{\mathbb{R}} a(t)dt \quad (a \in C_c(\mathbb{R})),$$

είναι η ω καλά ορισμένη θετική γραμμική μορφή στην $\mathcal{A}_0$; Είναι συνεχής; Ποιές συνθήκες για μια μη αρνητική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, εξασφαλίζουν την συνέχεια της γραμμικής μορφής

$$a \mapsto \int_{\mathbb{R}} a(t)f(t)dt$$

στην $\mathcal{A}_0$;

Άσκηση 6. *Στα παρακάτω, δείξτε την μορφή που παίρνουν τα βήματα της απόδειξης της κατασκευής GNS όταν η C* άλγεβρα είναι μεταθετική:*

Έστω $\mathcal{A} = C(X)$ (X συμπαγής) και $\omega(a) = \int_X a(t)d\mu(t)$ ($a \in C(X)$), όπου μ κανονικό μέτρο Borel στον X.

(i) *Αν $a, b \in C(X)$, έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.*

(ii) *Ο χώρος H_ω συμπίπτει με τον $L^2(X, \mu)$.*

(iii) *Έχουμε $\pi_\omega(a) = M_a$ δηλ. $(\pi_\omega(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.*

Επίσης, $\|\pi_\omega(a)\| = \|a\|_\infty$.

Άσκηση 7. *Έστω $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ και $\omega(a) = \sum_i p_i a_{ii}$ (όπου $a = [a_{ij}] \in \mathcal{A}$). Δείξτε ότι η ω είναι θετική αν-ν κάθε $p_i \geqslant 0$, είναι κατάσταση αν-ν $\sum_i p_i = 1$, και είναι πιστή αν-ν κάθε $p_i > 0$.*

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, να προσδιορίσετε τον χώρο H_ω, και να βρείτε μια ορθοκανονική του βάση.