ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $y \in K$, γράφουμε $y^* : K \mapsto \mathbb{C} : z \mapsto \langle z, y\rangle$ και για κάθε $x \in H$ θεωρούμε τον τελεστή

$$xy^* : K \mapsto \mathbb{C} \mapsto H : z \mapsto \langle z, y\rangle \mapsto \langle z, y\rangle x\,.$$

Ο xy^* είναι φραγμένος τελεστής πρώτης τάξης (αν-ν $x \neq 0, y \neq 0$).

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, ορίζουμε το *ίχνος (trace)* του T:

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_n \langle Te_n, e_n\rangle$$

όπου $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του H (ή του $(\ker T)^{\perp}$).

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι το* $\mathrm{tr}(T)$ *δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση και ότι* $\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST)$ *αν* $S, T \in \mathcal{B}(H)$ *και ένας (τουλάχιστον) από τους δύο έχει πεπερασμένη τάξη.*

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι το ίχνος ενός* $T \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του (συνυπολογίζοντας την πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής).*

Άσκηση 3. Αν $H = L^2([0,1])$ και $T \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης, δείξτε ότι

(α) Υπάρχει συνάρτηση $\phi \in L^2([0,1]^2)$ ώστε $(Tf)(t) = \int_0^1 \phi(t,s)f(s)ds$ για κάθε $f \in L^2([0,1])$,

(β) Αν επιπλέον ο T είναι θετικός τελεστής, δείξτε ότι $\mathrm{tr}(T) = \int_0^1 \phi(t,t)dt$.

Άσκηση 4. *Αν* $x, y \in H$, *δείξτε ότι*

$$\langle Ax, y\rangle = \mathrm{tr}(Axy^*), \quad A \in \mathcal{B}(H)\,.$$

Συνεπώς κάθε τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης ορίζει μια συνεχή γραμμική μορφή* $\omega_T : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C} : A \mapsto \mathrm{tr}(AT)$.

Δείξτε ότι η απεικόνιση $T \mapsto \omega_T$ *είναι γραμμική και 1-1. Όταν* $\dim H < \infty$, *κάθε γραμμική μορφή* $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ *είναι της μορφής* $\omega = \omega_T$.

Ο τελεστής $|T| = (T^*T)^{1/2}$ είναι θετικός τελεστής πεπερασμένης τάξης. Επομένως (φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) διαγωνοποιείται: Αν $\{x_n\}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και $\{s_n := s_n(T)\}$ οι ιδιοτιμές του,

$$|T| = \sum_n s_n x_n x_n^*\,.$$

Ο δυικός του $\mathcal{B}(H)$ αποτελείται από συνεχείς γραμμικές μορφές $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$. Επομένως εφοδιάζεται με τη νόρμα $\|\omega\| = \sup\{|\omega(A)| : A \in \mathrm{ball}\mathcal{B}(H)\}$.

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι για κάθε* $T \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης*

$$\|\omega_T\| = \sum_n s_n(T)\,.$$

Άσκηση 6. *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $\{e_i : i \in I\}$ *μια ορθοκανονική βάση του. Δείξτε ότι αν* $A \in \mathcal{B}(H)$ *είναι* θετικός *τελεστής, το*

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i \in I} \langle Ae_i, e_i\rangle \in [0, +\infty]$$

δεν εξαρτάται απ' την ορθοκανονική βάση και ότι $\|A\| \leqslant \mathrm{tr}(A)$. *Ένας* $T \in \mathcal{B}(H)$ *λέγεται τελεστής* ίχνους ή πυρηνικός (trace class operator) *αν* $\mathrm{tr}(|T|) < \infty$ *(όπου* $|T| = (T^*T)^{1/2}$*). Δείξτε ότι τότε ο* T *είναι* $\|\cdot\|$*-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Άσκηση 7. *Έστω* K *και* L *συμπαγείς και Hausdorff. Δείξτε ότι:*

(α) Ο χώρος $C(K) \otimes C(L)$ *είναι πυκνός στον* $C(K \times L)$.

(β) Αν επιπλέον μ *και* ν *είναι κανονικά μέτρα Borel στούς* K *και* L *αντίστοιχα, τότε για κάθε* $f \in C(K \times L)$ *ισχύει* $\int_K \int_L f d\nu d\mu = \int_L \int_K f d\mu d\nu$.