# ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)
## ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, ορίζουμε το *ίχνος (trace)* του $T$:

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$$

όπου $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $H$.

**Άσκηση 2.** *Δείξτε ότι το ίχνος ενός $T \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του (συνυπολογίζοντας την πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής).*

*Απόδειξη.* Ο τελεστής $T|_{(\ker T)^\perp}$ είναι 1-1 τελεστής ορισμένος σε $K$-διάστατο χώρο Hilbert (όπου $K = \mathrm{rank}T$), επομένως είναι unitarily ισοδύναμος με έναν 1-1 τελεστή $S$ στον $\ell^2(K) := (\mathbb{C}^K, \|\cdot\|_2)$ ο οποίος θα έχει το ίδιο ίχνος με τον $T$, και τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες πολλαπλότητες.

Θα δείξω ότι

*Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \dots, x_K\}$ του $\ell^2(K)$ ως προς την οποία ο πίνακας του $S$ είναι άνω τριγωνικός.*

Αυτό αρκεί: γιατί τότε η διαγώνιος $(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ του πίνακα αποτελείται από τις ιδιοτιμές του, επαναλαμβανόμενες ανάλογα με τις πολλαπλότητες τους (γιατί είναι ακριβώς οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(\lambda I - S)$) και συνεπώς το ίχνος του $S$ είναι $\lambda_1 + \cdots + \lambda_K$.

Επειδή ο χώρος $\ell^2(K)$ είναι μιγαδικός, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - S)$ έχει ρίζα: υπάρχει $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ώστε $\det(\lambda_1 I - S) = 0$, οπότε υπάρχει $x_1 \in \ell^2(K)$ με $\|x_1\| = 1$ ώστε $(\lambda_1 - S)x_1 = 0$. Ονομάζουμε τώρα $P_2$ την προβολή στον χώρο $H_2 := [x_1]^\perp$ και θεωρούμε τον τελεστή $S_2 := P_2 S|_{H_2}$. Ως προς τη διάσπαση $\ell^2(K) = [x_1] \oplus H_2$, ο πίνακας του $S$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

(άρα $\langle Sx_1, x_1 \rangle = \lambda_1$). Αν $K = 2$ έχουμε τελειώσει: ο πίνακας $S_2$ είναι $1 \times 1$, δηλαδή μιγαδικός αριθμός, και έχουμε την επιθυμητή τριγωνοποίηση. Αν $K > 2$, συνεχίζουμε:

Με το ίδιο επιχείρημα για τον $S_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ υπάρχει $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ και $x_2 \in H_2$ με $\|x_2\| = 1$ (οπότε $\{x_1, x_2\}$ ορθοκανονικά) ώστε $S_2 x_2 = \lambda_2 x_2$. Έχουμε λοιπόν

$$\langle Sx_2, x_2 \rangle = \langle Sx_2, P_2 x_2 \rangle = \langle P_2 S x_2, x_2 \rangle = \langle S_2 x_2, x_2 \rangle = \lambda_2.$$ [1]

Ονομάζουμε τώρα $P_3$ την προβολή στον χώρο $H_3 = [x_1, x_2]^\perp$ και θεωρούμε τον τελεστή $S_3 := P_3 S|_{H_3}$. Ως προς τη διάσπαση $\ell^2(K) = [x_1, x_2] \oplus H_3$, ο πίνακας του $S$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας έτσι, μετά από $K$ βήματα θα έχουμε κατασκευάσει ορθοκανονικά διανύσματα $\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$ στον $\ell^2(K)$ (άρα, μια ορθοκανονική βάση του) και μιγαδικούς αριθμούς $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$ ώστε ο πίνακας του $S$ ως προς την βάση αυτή να είναι

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_K \end{bmatrix}$$

όπως θέλαμε.

**Άσκηση 6.** *Έστω $H$ χώρος Hilbert και $\{e_i : i \in I\}$ μια ορθοκανονική βάση του. Δείξτε ότι αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι* θετικός *τελεστής, το*

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i \in I} \langle Ae_i, e_i \rangle \in [0, +\infty]$$

[1](Δείξαμε ότι $\langle S_2 x_2, x_2 \rangle = \lambda_2$. Δεν ισχύει κατ' ανάγκην ότι $S_2 x_2 = \lambda_2 x_2$.)

*δεν εξαρτάται απ' την ορθοκανονική βάση και ότι $\|A\| \leq$ tr$(A)$. Ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται τελεστής ίχνους* ή *πυρηνικός* (trace class operator) *αν* tr$(|T|) < \infty$ *(όπου $|T| = (T^*T)^{1/2}$). Δείξτε ότι τότε ο $T$ είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

**Σχόλιο για το τελευταίο μέρος**
Έστω $A = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής με πεπερασμένο ίχνος. Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_i : i \in I\}$ του $H$ και θέτουμε, γ ια κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n := \{i \in I : \langle Ae_i, e_i\rangle > \frac{1}{n}\}\,.$$

Εφόσον $\sum_{i\in I}\langle Ae_i, e_i\rangle < \infty$, κάθε $J_n$ είναι πεπερασμένο, και η ένωση $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{i \in I : \langle Ae_i, e_i\rangle \neq 0\}$, που είναι επομένως αριθμήσιμο. Συνεπώς,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i\in I}\langle Ae_i, e_i\rangle = \sum_{i\in J}\langle Ae_i, e_i\rangle = \lim_n \sum_{i\in J_n}\langle Ae_i, e_i\rangle$$

άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $\sum_{i\notin J_n}\langle Ae_i, e_i\rangle < \epsilon^2$.

Ονομάζουμε $P_n$ την ορθή προβολή στον χώρο span$\{e_i : i \in J_n\}$ (που έχει πεπερασμένη διάσταση) και θέτουμε $B = A^{1/2}$ και $B_n := BP_n$ οπότε $B_n^*B_n = P_nAP_n$. O $B_n$ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_n \|B - B_n\| = 0\,.$$

Έστω $x \in H$. Έχουμε $P_nx = \sum\limits_{i\in J_n}\langle x, e_i\rangle e_i$, άρα $x - P_nx := P_n^{\perp}x = \sum\limits_{i\notin J_n}\langle x, e_i\rangle e_i$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
Bx - B_nx = BP_n^{\perp}x &= \sum_{i\notin J_n}\langle x, e_i\rangle Be_i \\
\|Bx - B_nx\| &\leq \sum_{i\notin J_n}|\langle x, e_i\rangle|\,\|Be_i\| \\
&\leq \left(\sum_{i\notin J_n}|\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\notin J_n}\|Be_i\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|x\|\left(\sum_{i\notin J_n}\langle Ae_i, e_i\rangle\right)^{1/2} < \|x\|\,\epsilon \\
\text{άρα}\quad \|B - B_n\| &< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Αν τώρα $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής ίχνους και θέσουμε $A = |T| = (T^*T)^{1/2}$, υπάρχει τελεστής $U \in \mathcal{B}(H)$ νόρμας 1 ώστε $T = UA = UB^2$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\lim_n \|T - TP_n\| = \lim_n \|UB(B - BP_n\| \leq \lim_n \|UB\|\,\|B - BP_n\| = 0\,,$$

όπως θέλαμε.

**Σχόλιο** Χρησιμοποιώντας το γεγονός (όπως έδειξε ο Σ.Π.) ότι ο $A$ είναι *συμπαγής τελεστής*, προκύπτει από το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_i : i \in I\}$ του χώρου αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $A$, με ιδιοτιμές μη αρνητικές βεβαίως. Σε αυτήν την περίπτωση ο $A$ μετατίθεται με τον $P_n$ και ο τελεστής $A_n = P_nAP_n = AP_n$ είναι διαγώνιος ως προς την *ίδια βάση*, και συνεπώς ο τελεστής $A - A_n$ είναι και αυτός θετικός.

Έχουμε τότε $(A - A_n)e_i = 0$ αν $i \in J_n$ και $(A - A_n)e_i = Ae_i$ αν $i \notin J_n$, οπότε

$$\text{tr}(A - A_n) = \sum_{i\notin J_n}\langle Ae_i, e_i\rangle < \epsilon^2$$

οπότε έχουμε το ισχυρότερο συμπέρασμα ότι

$$\lim_n \text{tr}(|T - TP_n|) = 0$$

γιατί $(|T - TP_n|)^2 = (TP_n^{\perp})^*(TP_n^{\perp}) = P_n^{\perp}T^*TP_n^{\perp} = P_n^{\perp}AP_n^{\perp} = A(I - P_n) = A - A_n$.