Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις IV

Σπυρίδων Πετράκος

11 Ιανουαρίου 2021

Άσκηση 1. Γράφουμε $T = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j^*$ και έχουμε

$$\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle = \sum_n \sum_{j=1}^{k} \langle e_n, y_j \rangle \langle x_j, e_n \rangle =$$
$$\sum_{j=1}^{k} \left\langle \sum_n \langle x_j, e_n \rangle e_n, y_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle x_j, y_j \rangle$$

που είναι ανεξάρτητο της επιλογής της $\{e_n\}_n$. Έστω τώρα $S \in \mathcal{B}(H)$ (κρατάμε τον ίδιο T). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $ST = \sum_{j=1}^{k} (Sx_j) y_j^*$ και $TS = \sum_{j=1}^{k} x_j (S^* y_j)^*$. Άρα, από τον υπολογισμό που κάναμε:

$$\mathrm{tr}(ST) = \sum_{j=1}^{k} \langle Sx_j, y_j \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle x_j, S^* y_j \rangle = \mathrm{tr}(TS).$$

Άσκηση 2. Έστω $T, S \in \mathcal{F}(H)$ και $R = T + S$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_H(.) : \mathcal{F}(H) \to \mathbb{C}$ το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης (με πολλαπλότητες, εννοείται). Παρατηρούμε ότι περιορίζοντας τους T, S, R στον (πεπερασμένης διάστασης) υπόχωρο $V = T(H) + S(H)$, αυτοί διατηρούν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές (και τις ίδιες πολλαπλότητες). Για τους $T|_V, S|_V, R|_V$, ως τελεστές στον $\mathcal{L}(V)$, ξέρουμε από γραμμική άλγεβρα (βλέπε Παράρτημα) ότι ισχύει $\Lambda_H(T) + \Lambda_H(S) = \Lambda_V(T|_V) + \Lambda_V(S|_V) = \Lambda_V(R|_V) = \Lambda_H(R)$. Επομένως, αν δείξουμε ότι $\mathrm{tr} = \Lambda_H$ για τελεστές πρώτης τάξης, θα έχουμε το ζητούμενο λόγω προσθετικότητας. Αυτό όμως είναι άμεσο, αφού προφανώς $\Lambda_H(xy^*) = \langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(xy^*)$.

Άσκηση 3. (α) Εφόσον $T \in \mathcal{F}(H)$, υπάρχουν $f_i, g_i \in L^2([0,1])$ ώστε $T : h \mapsto \sum_{i=1}^n \int h\bar{g}_i d\lambda f_i$, δηλαδή $Th(t) = \int \varphi(t,s)h(s)d\lambda(s)$ όπου $\varphi(t,s) = \sum_{i=1}^n \bar{g}_i(s)f_i(t)$. Εύκολα $\varphi \in L^2([0,1]^2)$, από θεώρημα Tonelli.
(β) Από την Άσκηση 1, $\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^n \langle f_i, g_i\rangle = \int \varphi(t,t)d\lambda(t)$.[1]

Άσκηση 4. Από την Άσκηση 1, $\langle Ax, y\rangle = \mathrm{tr}((Ax)y^*) = \mathrm{tr}(Axy^*)$. Λόγω γραμμικότητας, η ω_T είναι καλά ορισμένη και συνεχής (αφού $|\omega_T(A)| = |\sum \langle Ax_i, y_i\rangle| \le \|A\| \sum \|x_i\| \|y_i\|$). Η απεικόνιση $T \mapsto \omega_T$ είναι γραμμική από τη γραμμικότητα του ίχνους. Αν $\omega_T = 0$, τότε $\omega_T(T^*) = \mathrm{tr}(T^*T) = 0$ και άρα $T = 0$. Αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης, μπορούμε να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{B}(H)$ με $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$. Με αυτή τη δομή ο $\mathcal{B}(H)$ είναι χώρος Hilbert και άρα, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, η απεικόνιση $S \mapsto \omega_{S^*}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Άσκηση 5. Αν $T = U|T|$ είναι η πολική αναπαράσταση του T, τότε γνωρίζουμε[2] ότι $T = \sum_n s_n(T)(Ux_n)x_n^*$, όπου (x_n) ο.κ. βάση του $(\ker|T|)^\perp$. Άρα

$$|\omega_T(A)| = |\sum_n s_n(T)\langle AUx_n, x_n\rangle| \le \sum_n s_n(T)\|A\|.$$

Για $A = U^*$ έχουμε ισότητα, δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 6. Εφόσον $A \ge 0$, γράφουμε $A = T^2, T \ge 0$. Έστω $(e_i), (f_j)$ δύο ο.κ. βάσεις του H. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parceval, έχουμε

$$\sum_i \langle Ae_i, e_i\rangle = \sum_i \|Te_i\|^2 = \sum_i\sum_j |\langle Te_i, f_j\rangle|^2 =$$
$$\sum_j\sum_i |\langle e_i, Tf_j\rangle|^2 = \sum_j \|Tf_j\|^2 = \sum_j \langle Af_j, f_j\rangle,$$

δηλαδή το ίχνος είναι ανεξάρτητο της επιλογής ο.κ. βάσης. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και $x \in H$ μοναδιαίο με $\|Tx\|^2 > \|T\|^2 - \varepsilon = \|A\| - \varepsilon$. Συμπληρώνουμε το $\{x\}$ σε ο.κ. βάση B του H. Τότε

$$\|A\| < \|Tx\|^2 + \varepsilon \le \sum_{u\in B}\|Tu\|^2 + \varepsilon = \mathrm{tr}(A) + \varepsilon.$$

Το ε ήταν τυχόν, άρα $\|A\| \le \mathrm{tr}(A)$. Αν ο A είναι τελεστής ίχνους, τότε για κάθε ο.κ. ακολουθία (e_n) έχουμε $\langle |A|e_n, e_n\rangle \to 0$, αφού αν την επεκτείνουμε σε ο.κ. βάση, η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει. Επομένως ο $|A|$ είναι

[1] Γιατί να είναι θετικός ο T;

[2] AK, Θεώρημα 4.2.17, δεν θυμάμαι αν ήταν στην ύλη του προπτυχιακού ή όχι.

συμπαγής και άρα, από την πολική αναπαράσταση, και ο A είναι. Έχουμε το ζητούμενο, αφού οι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι $\|.\|$-πυκνοί στον χώρο των συμπαγών τελεστών.

Άσκηση 7. (α) Θεωρούμε τη διγραμμική απεικόνιση $C(K) \times C(L) \to C(K \times L) : (f, g) \mapsto fg$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αυτή ικανοποιεί το (2) του Λήμματος 1.8 (στο αρχείο του AX) και άρα μπορούμε να δούμε τον χώρο $C(K) \otimes C(L)$ ως τον χώρο που παράγεται από τις συναρτήσεις $\varphi \in C(K \times L)$ με $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ για κάποια $f \in C(K)$ και κάποια $g \in C(L)$. Ο χώρος αυτός είναι *-υποάλγεβρα της $C(K \times L)$ και διαχωρίζει τα σημεία (επειδή οι χώροι είναι συμπαγείς και Hausdorff). Πράγματι, αν $(x, p) \neq (y, q)$, μπορούμε λόγω συμμετρίας να υποθέσουμε ότι $x \neq y$. Επιλέγουμε $f \in C(K)$ με $f(x) \neq f(y)$ και $g \equiv 1 \in C(L)$. Τότε $f \otimes g(x, p) = f(x) \neq f(y) = f \otimes g(y, q)$. Από το θεώρημα Stone-Weierstrass, έχουμε το ζητούμενο.
(β) Έστω $(\varphi_n) \subseteq C(K) \otimes C(L) : \varphi_n \to f$. Είναι φανερό ότι για τις φ_n ισχύει το ζητούμενο (αφού αν $g \in C(K), h \in C(L)$ έχουμε $\iint g \otimes h \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu = \int g \,\mathrm{d}\mu \int h \,\mathrm{d}\nu = \iint g \otimes h \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu$). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\varphi_n| \leq \|f\|_\infty + M$ για κάποια θετική σταθερά M και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά τα μ, ν είναι πεπερασμένα, άρα οι σταθερές είναι ολοκληρώσιμες. Άρα από ΘΚΣ έχουμε το ζητούμενο.

Παράρτημα

Θα δείξουμε τη γραμμικότητα της Λ_V της Άσκησης 2, όπου V χώρος πεπερασμένης διάστασης n. Έστω $T \in \mathcal{L}(V) = \mathcal{F}(V)$. Σταθεροποιούμε μια βάση του V και θεωρούμε τον πίνακα $A = [t_{ij}]$ του T ως προς τη βάση αυτή. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\chi_T(x) = \det(xI - A) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i$. Οι ιδιοτιμές του T είναι οι ρίζες του χ_T (με τις αντίστοιχες πολλαπλότητες), και άρα, από τους τύπους του Vieta, $\Lambda_V(T) = -a_{n-1}$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στον ορισμό του χ_T, εύκολα (πχ με επαγωγή στη διάσταση, αν θέλουμε να είμαστε εντελώς αυστηροί, αλλά το βλέπουμε κιόλας) έχουμε

$$\chi_T(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - t_{ii}) + p(x),$$

όπου το p είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 2$. Επομένως $-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}$ (δηλαδή το ίχνος με τον ορισμό που δίναμε στη γραμμική άλγεβρα του προπτυχιακού). Ιδιαιτέρως, το $-a_{n-1} = \Lambda_V(T)$ εξαρτάται γραμμικά από τον T.