$\mathcal{A}$: C*-αλγ μεταθετική

$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ = χαρακτήρες $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$
μορφ., $\underline{\underline{\varphi \neq 0}}$

$\mathfrak{S}$ w*-συμπαγής όταν $\mathcal{A}$ έχει $\mathbb{1}$

αλλιώς όχι πχ

$\mathcal{A} = c_0(\mathbb{N})$ τότε $\varphi_n(a) = a(n)$
$a \in \mathcal{A}$
τότε $\{\varphi_n\}$ συγκλίνει w*
στο $0 \notin \mathfrak{S}(\mathcal{A})$

Ερώτηση

Αν $\mathcal{A}$ έχει πεπερ. διάσταση
(μεταθετική ή όχι)
τότε
$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ είναι w*-συμπαγές;

Απάντηση ΝΑΙ, διότι είναι πεπερασμένο

→ Ερώτηση πού αποδεικνύεται ↑

Ερώτηση': Κάθε C*-αλγ. πεπερ. διάστασης
έχει μονάδα!

Παράδ. $\mathcal{A} = M_3(\mathbb{C})$, τότε $\mathfrak{S}(\mathcal{A}) = \emptyset$

Λήμμα $\mathcal{A}$: C^*-άλγ με $1\!\!1 \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$
με $a^*a = aa^*$

Συνέπεια
$$\mathcal{C} = C^*(1\!\!1, a) = \text{η μικρότερη } C^*\text{-υπάλγ της } \mathcal{A} \text{ που περιέχει το } 1\!\!1, a$$

Η απεικόνιση
$$\hat{a} : \Omega(\mathcal{C}) \longrightarrow \sigma(a)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(a) \in \sigma(a)$$
είναι ομοιομορφισμός.

Θεώρημα Με τις πάνω υποθέσεις
∃ ισομετρικός $*$-μορφισμός
$$\Phi_c : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{A}$$
με $\Phi_c(1\!\!1) = 1\!\!1_{\mathcal{A}}$
$\Phi_c(id) = a$

Απόδ Από το Λήμμα $\hat{a} : \underset{K}{\underset{\|}{\Omega(\mathcal{C})}} \longrightarrow \sigma(a) = \Sigma$

$\hat{a} : K \longrightarrow \Sigma$ ομοιομ

Θεωρώ
$$\Psi : C(\Sigma) \longrightarrow C(K)$$
$$f \longmapsto f\circ\hat{a}$$

$f : \Sigma \to \mathbb{C}$
$$\Psi(f) : K \xrightarrow{\hat{a}} \Sigma \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$\Psi(f)$ συνεχής άρα $\Psi(f) \in C(K)$

Ψ: γραμμική $\Psi(f+\lambda g) = (f+\lambda g)\circ\hat{a}$
$$= f\circ\hat{a} + \lambda g\circ\hat{a}$$
$$= \Psi(f) + \lambda\Psi(g)$$

: μορφ $\Psi(fg) = (fg)\circ\hat{a}$
$$= (f\circ\hat{a})(g\circ\hat{a})$$

: διατηρεί $*$: $\overline{(f\circ\hat{a})} = \bar{f}\circ\hat{a}$
$$\overline{\Psi(f)} = \Psi(\bar{f})$$

Ψ ισομετρία:

$$\|\Psi(f)\|_{C(K)} = \sup\{|\Psi(f)(\lambda)| : \lambda \in K\}$$
$$= \sup\{|f(\hat{a}(\lambda))| : \lambda \in K\}$$
$\hat{a} : K \twoheadrightarrow \Sigma$
$$= \sup\{|f(\mu)| : \mu \in \Sigma\} = \|f\|_{C(\Sigma)}$$

K, Σ δύο συμπαγείς T_2

$$\hat{a} : K \longrightarrow \Sigma \quad \text{ομοιομορφ.}$$

$$\psi : C(\Sigma) \longrightarrow C(K)$$
$$f \longmapsto f\circ\hat{a}$$

ψ $*$-μορφ, $\psi(1) = 1$

$$\|\psi(f)\|_{C(K)} = \{ |\psi(f)(\lambda)| : \lambda \in K \}$$
$$= \{ |f(\mu)| : \mu \in \Sigma \} = \|f\|_{C(\Sigma)}$$

$\forall g \in C(\Sigma)$ θέτω $f = g \circ \hat{a}^{-1}$
f συνεχής

$f \in C(K)$

και $\psi(f) = f\circ\hat{a} = g$

άρα ψ είναι επί

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\hat{a}"] \arrow[dr, "f\circ\hat{a}"'] & \Sigma \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$C(\Sigma) \xrightarrow{\psi} C(K)$$
$$f \longmapsto f\circ\hat{a}$$

όμως, $\mathcal{C} = C^*(1, a) \subseteq \mathcal{A}$
είναι μία μεταθ. C^*-άλγ. έπεται

$\sigma(\mathcal{C}) = K$

$$\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow C(K)$$
$$b \longmapsto \hat{b} \qquad (\hat{b}(\varphi) = \varphi(b))$$

είναι ισομετρικός $*$-μορφισμός επί

$$\Phi_c : C(\Sigma) \xrightarrow{\psi} C(K) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$$

σύνθεση δύο ισομετρικών $*$-μορφ.
$\Rightarrow$ ισομετρικός $*$-μορφ.
με εικόνα $= \mathcal{C}$

επίσης $\Phi_c(1_\Sigma) = \mathcal{G}^{-1}(\psi(1_\Sigma))$
$$= \mathcal{G}^{-1}(1_K) = 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{C}}$$

και επίσης
$$\boxed{\Phi_c(id) \overset{?}{=} a}$$

$f_0(\lambda) = id(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \Sigma$

$$\psi(f_0) = \underset{\text{τ } id}{f_0}\circ\hat{a} = \hat{a}$$

$$C(\Sigma) \xrightarrow{\psi} C(K) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{C}$$
$$1 \longrightarrow \hat{a} \longrightarrow a$$

Πρόταση Αν $\exists$ $*$-μορφ. $\Phi : C(\sigma(a)) \to A$

$$1 \mapsto 1$$
$$f_0 = id \mapsto a$$

τότε αναγκαστικά $aa^* = a^*a$

Απόδ. $\varphi(f_0) = a$

$$\varphi(\bar f_0) = \varphi(f_0)^* = a^*$$

$$aa^* = \varphi(f_0)\varphi(\bar f_0)$$
$$= \varphi(f_0\bar f_0) = \varphi(\bar f_0 f_0)$$
$$= \varphi(\bar f_0)\varphi(f_0)$$
$$= \varphi(f)^*\varphi(f_0) = a^*a$$

Μοναδικότητα Αν φ_1, φ_2 είναι $*$-μορφισμοί

$$\varphi_i : C(\sigma(a)) \to A$$

$$\varphi_i(1) = 1$$
και
$$\varphi_i(id) = a \qquad (i = 1, 2)$$

τότε $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)\ \forall f \in C(\sigma(a))$

Απόδ. $f_0(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \sigma(a)$

$$\varphi_1(f_0) = a = \varphi_2(f_0)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1(\bar f_0) = \varphi_1(f_0)^* = \varphi_2(f_0)^*$$
$$= \varphi_2(\bar f_0)$$

όμοια, $\varphi_1(f_0^m \bar f_0^k) = \varphi_1(f_0)^m \varphi_1(\bar f_0)^k$

$$= \varphi_2(f_0)^m \varphi_2(\bar f_0)^k$$
$$= \varphi_2(f_0^m \bar f_0^k)$$

άρα, $\forall p$ πολυώνυμο του λ και $\bar\lambda$

$$p(\lambda, \bar\lambda) = \sum c_{k,m} \lambda^m \bar\lambda^k$$

$$\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$$

∴ πρέπει μόνο να δούμε ότι η άλγεβρα αυτή των πολυωνύμων ικανοποιεί το S-W

Αυτόματη συνέχεια μορφισμών

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: C*-άλγεβρες με 1,

$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *-μορφισμός με $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$

Πρόταση 1 $\forall a \in \mathcal{A}$ $\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$

Απόδειξη Αν $\lambda \notin \sigma(a) \iff \lambda 1_{\mathcal{A}} - a \in Inv(\mathcal{A})$

$\Downarrow$ φ μορφισμός

$\varphi(\lambda 1_{\mathcal{A}} - a) \in Inv(\mathcal{B})$

$\| $

$\lambda \varphi(1_{\mathcal{A}}) - \varphi(a)$

$\| $

$\lambda 1_{\mathcal{B}} - \varphi(a)$

$\Downarrow$

$\lambda \notin \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$

(αν $x = (\lambda 1 - a)^{-1}$ τότε
$\varphi(x)\varphi(\lambda 1 - a)$
$= \varphi(1) = 1$.
$= \varphi(\lambda 1 - a)\varphi(x)$)

Πρόταση 2 $\forall a \in \mathcal{A}$, $\|\varphi(a)\| \le \|a\|$ άρα συνεχής

Απόδειξη Περίπτωση 1 : $a = a^*$
Ξέρω $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$

$\varphi(a) = \varphi(a)^*$ (διότι φ είναι *-μορφ.)

$$\|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))\}$$ (Πρότ. 1)

$$\le \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\}$$

$$= \|a\| \quad (a = a^*)$$

Γενική περίπτωση :
$a \in \mathcal{A}$ τότε a^*a είναι αυτοσυζυγές
C^* $\|\varphi(a^*a)\| \le \|a^*a\|$

$$\|\varphi(a)\|^2 \overset{C^*}{=} \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| \overset{*\text{-μορφ.}}{=} \|\varphi(a^*a)\| \le \|a^*a\| = \|a\|^2$$ ∎

Νδο αν φ είναι 1-1, τότε $\|\varphi(a)\| = \|a\| \ \forall a \in \mathcal{A}$

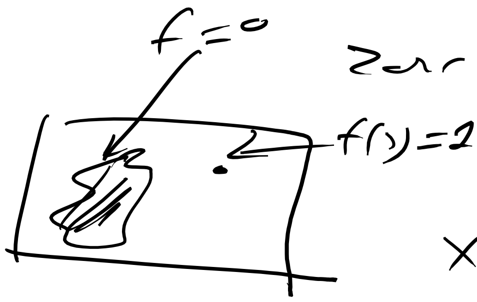
Πρόταση 3 Αν επιπλέον φ είναι 1-1 $\forall a \in \mathcal{A}$ $a = a^*$
τότε
$$\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \quad (\subseteq \cancel{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{R}$$

$a=a^*$

Απόδ. Έστω $a \in A$. Ξέρω

$$\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$$

υπόθεση: $\neq$ για άτοπο



Τότε $\exists f : \sigma_A(a) \to [0,1]$ συνεχής $\neq 0$

$$f|_{\sigma_B(\varphi(a))} = 0$$ (Urysohn)

Χρησιμοποιώ το φ_c για το $a=a^*$

$\|f(a)\|_A = \|f\|_{\sigma(a)} \neq 0$ $\quad \varphi_c(f) = f(a) \in A$, $\boxed{f(a) \neq 0}$ διότι $f \neq 0$

$\Downarrow$

φ είναι 1-1 $\quad \varphi(f(a)) \in B$ $\neq 0$

Όμως ισχύει γενικά ότι $\forall g \in C(\sigma(a))$

$$\varphi(g(a)) = g(\varphi(a))$$

Απόδ.

φ μορφ., η ισότητα ισχύει για $g(\lambda) = \lambda^n$

φ $*$-μορφ., ισχύει για $g(\lambda) = \bar{\lambda}$

$\Rightarrow$ ισχύει $\forall\, p(\lambda, \bar{\lambda})$ πολυώνυμο

$p(\lambda,\bar{\lambda}) = \sum c_{km} \lambda^k \bar{\lambda}^m$

$$\varphi(p(a)) = p(\varphi(a))$$

Όμως, αυτά τα πολυώνυμα είναι πυκνά στη $C(\sigma(a))$ και η φ είναι συνεχής (νόρμα 1)

$\Rightarrow$ ισχύει $\varphi(g(a)) = g(\varphi(a))$ $\forall g \in C(\sigma(a))$

για την f: $\varphi(f(a)) \neq 0$

$$\overset{\|}{f(\varphi(a))}$$

όμως, η f μηδενίζεται στο $\sigma_B(\varphi(a))$

$\Downarrow$

$f(\varphi(a)) = 0$ άτοπο

Πρόταση 4 Αν φ είναι 1-1, τότε $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$

Απόδ.

$$\|\varphi(a)\|^2 \overset{C^*}{=} \|\varphi(a)^*\varphi(a)\|$$

$$\overset{\ast\text{-μορφ.}}{=} \|\varphi(a^*a)\| \quad \text{όμως } \varphi(a^*a) \text{ αυτοσυζ.}$$

$$= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a^*a))\}$$

$\quad\quad \| \text{ Πρόταση 3 αφού } a^*a \text{ αυτοσυζ.}$

$\quad\quad \sigma_{\mathcal{A}}(a^*a)$

$$= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a^*a)\}$$

$$= \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \blacksquare$$

Πόρισμα Αν φ είναι 1-1, τότε $\varphi(\mathcal{A})$ είναι C^*-υποάλγεβρα της $\mathcal{B}$

Απόδ. Είναι κλειστή, αφού είναι πλήρης

Παρατ. Το 1-1 δεν χρειάζεται αφού:

$J = \ker\varphi$: είναι ιδεώδες, άρα κλειστό

$\| \implies \mathcal{A}' = \mathcal{A}/J$: είναι C^*-αλγ. με $\|$

και φ επάγει μια $\varphi' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$

$a + J \mapsto \varphi(a) + 0$

που είναι $\ast$-μορφισμός

άρα συνεχής

και είναι 1-1

άρα ισομετρία

άρα η $\varphi'(\mathcal{A}/J)$ είναι κλειστή στην $\mathcal{B}$

$\quad \| $

$\varphi(\mathcal{A}) \quad \blacksquare$

(Μοναδικότητα της $\|\ \|$)

Ισχύει $(\mathcal{A}, \|\ \|)$ C^*-αλγ., $\|\cdot\|'$ άλλη νόρμα στην $\mathcal{A}$ με $\|ab\|' \le \|a\|'\|b\|'$ και $\|a^*a\|' = (\|a\|')^2$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$

Συμπέρ. $\|\cdot\| = \|\cdot\|'$

Απόδ. $(\mathcal{A}, \|\ \|')$ θεωρώ $(\mathcal{A}', \|\ \|')$ την πλήρωση. Επειδή πράξεις συνεχείς, η $\mathcal{A}'$ είναι C^*-άλγεβρα

$$\varphi : (\mathcal{A}, \| \ \|) \longrightarrow (\mathcal{A}', \| \ \|')$$
$$a \longmapsto a$$

προφανώς $*$-μορφισμός, και 1-1

άρα είναι ισομετρία

$$\|a\|' = \|\varphi(a)\|' = \|a\| \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

$\blacksquare$

<u>Θεώρ.</u> <u>Φασματικής Απεικόνισης</u>

$\mathcal{A}$: C^*-άλγ. με 1, $a \in \mathcal{A}$ με $a^*a = aa^*$

$f \in C(\sigma(a))$ ορίζεται $f(a) \in \mathcal{A}$

Τότε: $\sigma(f(a)) = \{ f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a) \}$

<u>Απόδ.</u> Έχω το συνεχή λογισμό

$$\varphi_a : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$f \longmapsto \underline{f(a)}$$

ισομετρικός $*$-μορφ.

και το $\varphi_a(C(\sigma(a))) = \mathcal{B} = C^*(1, a)$

όπως δείξαμε πριν, $\forall f \in C(\sigma(a))$

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi_a(f)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f)$$

αφού $\lambda 1 - \varphi_a(f) \in Inv(\mathcal{B})$

$$\Updownarrow$$

$\lambda 1 - f \in Inv(C(\sigma(a)))$

$\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(f))$ δηλ. $\sigma_{\mathcal{B}}(f(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(f(a))$

(ανεξαρτησία φάσματος σε C^*-άλγ.)

$$\sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a))$$

όπως $\underline{\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))}$ $\blacksquare$