Προσεγγιστικές μονάδες

Προσεγγιστική μονάδα σε μια άλγεβρα Banach A είναι ένα δίκτυο $(e_i)_{i\in I}$ στοιχείων της A με την ιδιότητα

$$\forall a \in A, \lim_i \|a - ae_i\| = \lim_i \|a - e_i a\| = 0\,.$$

Πρόταση. *Στην $A = C_0(\mathbb{R})$ υπάρχει προσεγγιστική μονάδα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που επιπλέον περιέχεται στο ιδεώδες $C_c(\mathbb{R})$ και ικανοποιεί $0 \leqslant e_n \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Πράγματι: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε e_n την συνάρτηση που

(α) μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[-n-1, n+1]$

(β) είναι ίση με 1 παντού στο διάστημα $[-n, n]$ και

(γ) είναι κατά τμήματα γραμμική στα διαστήματα $(-n-1, -n)$ και $(n, n+1)$.

Έστω $f \in A$. Θα δείξουμε ότι $\lim_n \|f - fe_n\|_\infty = 0$. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $|f(t)| < \epsilon$ όταν $t \notin K_f$ (αφού $f \in C_0(\mathbb{R})$).

Το K_f είναι φραγμένο. Ονομάζουμε λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ τον μικρότερο φυσικό ώστε $[-n_0, n_0] \supseteq K_f$.

Για κάθε $n \geqslant n_0$, έχουμε $[-n, n] \supseteq K_f$, άρα

(β) Αν $t \in [-n, n]$, τότε $e_n(t) = 1$, άρα $|(f - fe_n)(t)| = 0$.

(γ) Αν $t \notin [-n, n]$, τότε $|f(t)| < \epsilon$ κα $0 \leqslant e_n(t) \leqslant 1$, άρα $|(f - fe_n)(t)| \leqslant |f(t)| < \epsilon$.

Συμπέρασμα: για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|(f - fe_n)(t)| < \epsilon$, άρα $\|f - fe_n\|_\infty \leqslant \epsilon$, όπως θέλαμε.

Παρατηρήσεις: (α) Δεν είναι απαραίτητο να επιλέξουμε την e_n κατά τμήματα γραμμική στο $[-n-1, n+1] \backslash [-n, n]$. Οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση μεταξύ 0 και 1 θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στο (γ) της κατασκευής.

(β) Με την παρατήρηση αυτή, εύκολα φαίνεται ότι η Πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε τοπικά συμπαγή *μετρικό* χώρο στη θέση του $\mathbb{R}$.

(γ) Προσεγγιστική μονάδα $(e_i)_{i\in I}$ που περιέχεται στο $C_c(X)$ και ικανοποιεί $0 \leqslant e_i \leqslant 1$ για κάθε $i \in I$ υπάρχει στην $C_0(X)$ για οποιονδήποτε συμαπαγή χώρο Hausdorff X, μόνο που δεν μπορεί να εξασφαλίσει κανείς την ύπαρξη *ακολουθίας*. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Λήμμα Urysohn.

(δ) Σε κάθε C* άλγεβρα A υπάρχουν προσεγγιστικές μονάδες $(e_i)_{i\in I}$ που ικανοποιούν $e_i \in A_+$ και $\|e_i\| \leqslant 1$ για κάθε $i \in I$.