Σχέδιο εργασίας: Η C* άλγεβρα $M_n(\mathcal{A})$ χωρίς Gelfand-Naimark

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα, $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και νόρμα

$$\left\|[\xi_1, \ldots, \xi_n]^T\right\|_{\mathcal{A}^n}^2 := \left\|\sum_j \xi_j^* \xi_j\right\|_{\mathcal{A}} .$$

Δείξτε ότι η σύγκλιση ως προς αυτή τη νόρμα ισοδυναμεί μα την σύγκλιση κατά συντεταγμένη. Συνεπώς ο $\mathcal{A}^n$ με αυτή τη νόρμα είναι χώρος Banach.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$ ορίζουμε $A : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η A είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση και ότι $A \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^n)$.

Έχουμε λοιπόν ορίσει μια απεικόνιση

$$\Phi : M_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(\mathcal{A}^n) : [a_{ij}] \mapsto A$$

που είναι προφανώς γραμμική και 1-1 (αν $A = 0$ τότε $A(\xi \otimes e_i) = 0$ για κάθε ξ και i δηλαδή $\sum_i a_{ij}\xi \otimes e_i = 0$ για κάθε ξ και i δηλαδή $a_{ij}\xi \otimes e_i = 0$ για κάθε ξ άρα $a_{ij} = 0$).

Επίσης, είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή

$$\Phi([a_{ij}][b_{ij}]) = \Phi([a_{ij}])\Phi([b_{ij}]) \quad \text{για κάθε } [a_{ij}], [b_{ij}] \in M_n(\mathcal{A}).$$

Πράγματι, αν ονομάσουμε $[c_{ij}]$ το γινόμενο των πινάκων $[a_{ij}]$ και $[b_{ij}]$, δηλαδή $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, και θέσουμε $A = \Phi([a_{ij}])$, $B = \Phi([b_{ij}])$, $C = \Phi([c_{ij}])$, για κάθε $\vec{\xi} \in \mathcal{A}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} A(B\vec{\xi}) &= A \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}\xi_j \otimes e_i \right) := A \sum_{i=1}^n (\eta_i \otimes e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j \otimes e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{kj}\xi_j \right) \otimes e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij}\xi_j \right) \otimes e_i = C\vec{\xi}. \end{aligned}$$

όπως θέλαμε.

Αλλά η $\mathcal{B}(\mathcal{A}^n)$, με τη νόρμα τελεστή, είναι άλγεβρα Banach (γιατί;). Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα στην $M_n(\mathcal{A})$ ορίζοντας

$$\|[a_{ij}]\| := \|\Phi([a_{ij}])\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A}^n)} ,$$

η $M_n(\mathcal{A})$ γίνεται άλγεβρα Banach.

Ορίζουμε τώρα ενέλιξη στην $M_n(\mathcal{A})$ ως εξής: $[a_{ij}]^* = [d_{ij}]$ όπου $d_{ij} = a_{ji}^* \in \mathcal{A}$.

Το ζήτημα είναι τώρα να αποδειχθεί η ιδιότητα C*: $\|[a_{ij}]^*[a_{ij}]\| = \|[a_{ij}]\|^2$ για κάθε $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$.

Πιθανώς θα χρειασθεί να αποδειχθεί μια ανισότητα τύπου Cauchy-Schwarz:

$$\left\|\sum_j a_j^* b_j\right\|_{\mathcal{A}}^2 \leqslant \left\|\sum_j a_j^* a_j\right\|_{\mathcal{A}} \left\|\sum_j b_j^* b_j\right\|_{\mathcal{A}}$$

Εξετάστε αν η απόδειξή σας χρησιμοποιεί ότι η $\mathcal{A}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως άλγεβρα τελεστών σε χώρο Hilbert!

Αναφορές

[1] E.C. Lance, *Hilbert C*-Modules: A Toolkit for Operator Algebraists*, Cambridge University Press (1995). doi:10.1017/CBO9780511526206.

[2] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C*-algebras*, Oxford University Press (1993).