C* Άλγεβρες: Θεώρημα Gelfand-Naimark I

Θα χρειασθεί η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 1. *Για κάθε* $y \in \mathcal{A}$ *και* $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$, *ισχύει* $\phi(y^*) = \overline{\phi(y)}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$ ισχύει ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$. Πράγματι: Έστω $\phi(a) = \lambda + i\mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το $b_n = a + in\mathbf{1}$ και έχουμε

$$\phi(b_n) = \phi(a) + in\phi(\mathbf{1}) = \lambda + i(\mu + n) \quad \text{αφού } \phi(\mathbf{1}) = 1.$$

Επομένως, $\qquad \lambda^2 + (\mu+n)^2 = |\phi(b_n)|^2 \leqslant \|b_n\|^2 \quad$ αφού $\|\phi\| = 1$.

$$\text{Άρα } \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n \leqslant \|b_n^* b_n\| = \left\|a^2 + n^2\mathbf{1}\right\| \leqslant \left\|a^2\right\| + n^2$$
$$\text{δηλαδή, } 2\mu n \leqslant \left\|a^2\right\| - \lambda^2 - \mu^2 .$$

Η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, παρά μόνον αν $\mu = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$.

Για τη γενική περίπτωση: Κάθε $y \in \mathcal{A}$ γράφεται μοναδικά $y = y_1 + iy_2$ με $y_i^* = y_i$ (όπου $y_1 = (y+y^*)/2$, $y_2 = (y-y^*)/2i$). Επειδή $\phi(y_i) \in \mathbb{R}$, έχουμε $\phi(y_i) \in \mathbb{R}$. Συνεπώς

$$\phi(y^*) = \phi(y_1 - iy_2) = \phi(y_1) - i\phi(y_2) = \overline{\phi(y_1) + i\phi(y_2)} = \overline{\phi(y)}. \qquad \square$$

Παρατήρηση Στην απόδειξη της Πρότασης, οι μόνες ιδιότητες του ϕ που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι $\phi(\mathbf{1}) = 1$ και ότι $\|\phi\| = 1$. Επομένως το συμπέρασμα του ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ που έχει αυτές τις δύο ιδιότητες. Μάλιστα, είναι φανερό ότι αρκεί η ιδιότητα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$. Παρατήρησε επίσης ότι η μεταθετικότητα της C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

Πόρισμα 2. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια C* άλγεβρα με μονάδα και* $a \in \mathcal{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R} .$$

Απόδειξη. Αν $\lambda \in \sigma(a)$, το στοιχείο $a - \lambda\mathbf{1}$ δεν είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, επομένως δεν είναι αντιστρέψιμο στην μεταθετική C*-άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγει το a και η $\mathbf{1}$. Έπεται ότι υπάρχει ένας χαρακτήρας ϕ της $C^*(\mathbf{1}, a)$ με $\phi(a - \lambda\mathbf{1}) = 0$, άρα $\phi(a) = \lambda$. Αφού $a = a^*$, από την Πρόταση έχουμε ότι $\lambda = \phi(a) \in \mathbb{R}$. $\square$

Θεώρημα 3 (Gelfand-Naimark)**.** *Κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την* $C(\Omega(\mathcal{A}))$ *όπου* $\Omega(\mathcal{A})$ *είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$*: Ο μετασχηματισμός Gelfand:*

$$\mathcal{A} \to C(\Omega(\mathcal{A})) : \ a \to \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a), \ \phi \in \Omega(\mathcal{A})$*) είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της* $\mathcal{A}$ επί της $C(\Omega(\mathcal{A}))$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο μετασχηματισμός Gelfand είναι *-μορφισμός. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1,

$$\widehat{x^*}(\phi) = \phi(x^*) = \overline{\phi(x)} = \overline{\hat{x}(\phi)}, \quad \phi \in \Omega(\mathcal{A}) .$$

Επομένως η εικόνα $\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ της $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\Omega(\mathcal{A}))$ που περιέχει την σταθερή συνάρτηση **1**. Επίσης, χωρίζει τα σημεία του χώρου $\Omega(\mathcal{A})$: αν $\phi \neq \psi$ είναι χαρακτήρες, υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a}(\phi) \neq \hat{a}(\psi)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Stone -Weierstrass (δες τη διατύπωση πιο κάτω), η $\widehat{\mathcal{A}}$ είναι πυκνή *-υπάλγεβρα της $(C(\Omega(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$.

Όμως, έχουμε δείξει ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει η ισότητα

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \Omega(\mathcal{A})\}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_\infty &= \sup\{|\hat{a}(\phi)| : \phi \in \Omega(\mathcal{A})\} = \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \Omega(\mathcal{A})\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\| \end{aligned}$$

γιατί η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, άρα η νόρμα κάθε στοιχείου της ισούται με τη φασματική του ακτίνα.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία, οπότε η εικόνα του $\widehat{\mathcal{A}}$ είναι πλήρης, άρα κλειστή στην $(C(\Omega(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$. Είναι όμως και πυκνή, οπότε τελικά $\widehat{\mathcal{A}} = C(\Omega(\mathcal{A}))$. $\square$

Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass
Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum).

Έστω $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$).

Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$. [1]

[1] Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf` στην `http://eclass.uoa.gr/courses/MATH287/`.