Μεταθετικές Άλγεβρες Banach: Παραδείγματα

1 Η άλγεβρα $C(K)$

Αν K είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff και $t \in K$, το σύνολο $\mathcal{M}_t = \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$ είναι αυτής της μορφής. Ο χώρος των χαρακτήρων της $C(K)$ είναι ομοιομορφικός με το K.

Η απεικόνιση Gelfand «είναι» η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι ισομετρία και επί.

Απόδειξη (i) Αν $t \in K$ θέτω $\delta_t(f) = f(t)$ για $f \in C(K)$. Είναι σαφές ότι η «εκτίμηση» $\delta_t : C(K) \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτήρας της $C(K)$. Επομένως ο πυρήνας της, $\mathcal{M}_t$, είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Το ζήτημα είναι να δείξει κανείς το αντίστροφο.

Έστω λοιπόν $\mathcal{M}$ ένα μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $t \in K$ ώστε $f(t) = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{M}$. Γιατί τότε θα έχουμε $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_t$, άρα, αφού το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_t$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει, δηλαδή ότι για κάθε $s \in K$ υπάρχει $f_s \in \mathcal{M}$ ώστε $f_s(s) \neq 0$. Υπάρχει τότε μία ανοικτή περιοχή U_s του s ώστε η f_s να μην μηδενίζεται πουθενά στην U_s. Το σύνολο $\{U_s : s \in K\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου K, επομένως έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Ονομάζω $f_1, \ldots, f_n$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις και θέτω

$$g = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2.$$

Ισχυρίζομαι ότι η g δεν μηδενίζεται πουθενά. Πράγματι κάθε $t \in K$ ανήκει σε κάποιο U_j, στο οποίο η αντίστοιχη f_j δεν μηδενίζεται. Από την δεύτερη ισότητα έχουμε $g(t) \geqslant |f_j(t)|^2 > 0$. Επομένως η συνάρτηση $1/g$ ορίζεται και ανήκει στην $C(K)$. Ομως, αφού $f_i \in \mathcal{M}$, η πρώτη ισότητα δείχνει ότι $g \in \mathcal{M}$, άρα $\mathbf{1} = (1/g).g \in \mathcal{M}$, αντίφαση.

Έτσι ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

(ii) Δείξαμε λοιπόν ότι η απεικόνιση $t \to \delta_t$ απεικονίζει το K *επί* του συνόλου των χαρακτήρων της $C(K)$. Μάλιστα η απεικόνιση αυτή είναι και 1-1, γιατί αν $t \neq s$ $(t, s \in K)$ υπάρχει $f \in C(K)$ ώστε $f(t) = 0$ και $f(s) \neq 0$ (Λήμμα Urysohn), δηλαδή $\delta_t(f) = 0$ και $\delta_s(f) \neq 0$. Επομένως η απεικόνιση

$$\Phi : t \to \delta_t : K \to \Omega(C(K))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός αρκεί, αφού ο K είναι συμπαγής, να δείξουμε ότι είναι συνεχής.

Έστω λοιπόν (t_i) δίκτυο στον K ώστε $t_i \to t \in K$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση f ισχύει $f(t_i) \to f(t)$, δηλαδή $\delta_{t_i}(f) \to \delta_t(f)$ για κάθε $f \in C(K)$. Από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $\delta_{t_i} \overset{w^*}{\to} \delta_t$.

(iii) Αν $f \in C(K)$, για κάθε $t \in K$ έχουμε

$$\hat{f}(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t)$$

δηλαδή $(\hat{f} \circ \Phi)(t) = f(t)$ αφού $\delta_t = \Phi(t)$. Επομένως

$$(\mathcal{G}(f)) \circ \Phi = f$$

οπότε, αν «ταυτίσουμε» τους συμπαγείς χώρους K και $\Omega(C(K))$ μέσω της Φ, ο μετασχηματισμός Gelfand «ταυτίζεται» με την ταυτοτική απεικόνιση: $\mathcal{G}(f) = f$.

2 Η άλγεβρα Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), ||\cdot||_1, *)$

Είναι γνωστό ότι ο χώρος

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k| < \infty\}$$

είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_1$ όπου

$$\|a\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k|.$$

Αν $e_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι η ακολουθία που έχει μονάδα στην θέση n και μηδέν στις υπόλοιπες, ο $\ell^1(\mathbb{Z})$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $E := \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ (μάλιστα το E είναι βάση Schauder του $\ell^1(\mathbb{Z})$). Το E γίνεται (αβελιανή) ομάδα (ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$) αν εφοδιασθεί με την πράξη $*$ όπου $e_n * e_m := e_{n+m}$. Η πράξη αυτή επεκτείνεται γραμμικά στην γραμμική θήκη $c_{oo}(\mathbb{Z})$ του E:

Αν τα $a = \sum a_k e_k$ και $b = \sum b_k e_k$ είναι πεπερασμένα αθροίσματα, θέτουμε

$$a * b = \sum_k \sum_m a_k b_m e_k * e_m$$

και παρατηρούμε ότι $a * b = \sum_n c_n e_n$ όπου $c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την πράξη $*$ της **συνέλιξης (convolution)** στον χώρο $\ell^1(\mathbb{Z})$, είτε παρατηρώντας ότι είναι συνεχής ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_1$, είτε απευθείας ως εξής: αν $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ορίζουμε την ακολουθία $c = (c_n) = a * b$ από την σχέση

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k b_{n-k} \quad n \in \mathbb{Z}$$

(η σειρά συγκλίνει απόλυτα γιατί η (a_k) είναι απόλυτα αθροίσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η (b_{n-k}) είναι φραγμένη). Πρέπει να δειχθεί ότι η (c_n) ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \sum_n |c_n| &= \sum_n |\sum_k a_k b_{n-k}| \\ &\leqslant \sum_n \sum_k |a_k|.|b_{n-k}| = \sum_k |a_k| \sum_n |b_{n-k}| \\ &= \|a\|_1.\|b\|_1 \end{aligned}$$

όπου η εναλλαγή των δύο αθροίσεων είναι επιτρεπτή, αφού πρόκειται για σειρές θετικών όρων, και η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $\sum_n |b_{n-k}| = \sum_n |b_n|$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι αποδείχθηκε συγχρόνως ότι $c = a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ και ότι $\|a * b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης αποδεικνύεται ως εξής

$$\begin{aligned}(a*(b*c))_n &= \sum_k a_k(b*c)_{n-k} \\ &= \sum_k a_k(\sum_m b_{n-k-m}c_m) = \sum_m(\sum_k a_k b_{(n-m)-k})c_m \\ &= \sum_m (a*b)_{n-m}c_m = ((a*b)*c)_n.\end{aligned}$$

Η επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης ως προς την πρόσθεση ισχύει τετριμμένα, επομένως αποδείχθηκε ότι η $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|.\|_1, *)$ είναι άλγεβρα Banach.

Η σχέση

$$(a*b)_n = \sum_k a_k b_{n-k} = \sum_j a_{n-j}b_j = (b*a)_n$$

δείχνει ότι η άλγεβρα είναι μεταθετική. Τέλος, ελέγχεται άμεσα ότι το στοιχείο e_0 όπου $(e_0)_n = \delta_{n,0}$ είναι μονάδα της άλγεβρας.

Παρατήρηση. Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ *δεν* είναι άλγεβρα συναρτήσεων, γιατί ο πολλαπλασιασμός δεν είναι το κατά σημείο γινόμενο. Οπως παρατηρήσαμε, ο πολλαπλασιασμός $*$ ορίσθηκε μέσω της αλγεβρικής δομής του «συνόλου δεικτών» $\mathbb{Z}$. Στο Παράδειγμα 3 θα «αναπαραστήσουμε» την $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$ ως άλγεβρα συναρτήσεων.

3 Η άλγεβρα του Wiener $\mathcal{W}$ ή $A(\mathbb{T})$

Πρόκειται για το σύνολο $\mathcal{W}$ των συναρτήσεων f της μορφής

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{ikt} \quad t \in [0, 2\pi]$$

όπου $\sum_k |a_k| < \infty$. Επειδή $|e^{ikt}| = 1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, η σειρά $\sum_k a_k e^{ikt}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα ως προς t, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση, δηλαδή ο χώρος $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του χώρου Banach $C([0, 2\pi])$. Δεν είναι όμως κλειστός ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ (άσκηση).

Δεν είναι αμέσως φανερό ότι ο $\mathcal{W}$ είναι κλειστός ως προς το κατά σημείο γινόμενο, ότι είναι δηλαδή υπάλγεβρα της $C([0, 2\pi])$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Αν $f(e^{it}) = \sum_k a_k e^{ikt}$ και $g(e^{it}) = \sum_k b_k e^{ikt}$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{W}$, τότε

$$\begin{aligned}f(e^{it})g(e^{it}) = \left(\sum_k a_k e^{ikt}\right)\left(\sum_n b_n e^{int}\right) &= \sum_k\sum_n a_k b_n e^{i(k+n)t} \\ = \sum_k\sum_m a_k b_{m-k}e^{imt} = \sum_m(\sum_k a_k b_{m-k})e^{imt} &= \sum_m (a*b)_m e^{imt}\end{aligned}$$

(η εναλλαγή των αθροίσεων είναι επιτρεπτή λόγω απόλυτης αθροισιμότητας).

Επειδή, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 2, η ακολουθία $((a*b)_m)$ είναι απόλυτα αθροίσιμη, έπεται ότι το (κατά σημείο) γινόμενο fg ανήκει στο $\mathcal{W}$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι και το *πηλίκο* f/g, όταν ορίζεται, ανήκει στην $\mathcal{W}$, αποδείχθηκε πρώτα από τον N. Wiener. Μία πολύ πιο άμεση απόδειξη, που δόθηκε από τον I. Gelfand, αποτέλεσε μία από τις πρώτες επιτυχίες της (νέας τότε) θεωρίας των αλγεβρών Banach. (Απόδειξη πιο κάτω.)

Οι συντελεστές a_k της σειράς καθορίζονται μοναδικά από την f, γιατί

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt = \sum_k a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-k)t}dt = a_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (χρησιμοποίησα την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς). Οι συντελεστές αυτοί λέγονται **συντελεστές Fourier** της f και συμβολίζονται $\hat{f}(n)$.

Επομένως η απεικόνιση

$$\mathcal{W} \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) : f \longrightarrow \hat{f} := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

(ο «μετασχηματισμός Fourier») είναι 1-1 και επί. Είναι προφανώς γραμμική, και δείξαμε προηγουμένως ότι είναι μορφισμός, δηλαδή ότι $\widehat{f.g} = \hat{f} * \hat{g}$.

Αν λοιπόν εφοδιάσουμε την $\mathcal{W}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_w$ όπου

$$\|f\|_w = \sum_k |\hat{f}(k)|,$$

τότε η $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_w, \cdot)$ γίνεται ισομετρικά ισόμορφη με την $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$, και επομένως γίνεται άλγεβρα Banach.

Ο χώρος $\Omega(\mathcal{W})$ των χαρακτήρων είναι ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$.

Η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί: έχει πυκνή, αλλά όχι κλειστή εικόνα, και (επομένως) η αντίστροφη απεικόνιση δεν είναι συνεχής.

Απόδειξη Η $\mathcal{W}$ είναι υπάλγεβρα της άλγεβρας $C(\mathbb{T})$ (η σειρά $\sum_k a_k e^{ikt}$ συγκλίνει ομοιόμορφα) και περιέχει την μονάδα $\mathbf{1}$. Άρα, κάθε χαρακτήρας της $C(\mathbb{T})$ ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{W}$. Επίσης, η $\mathcal{W}$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνή στην $C(\mathbb{T})$, αφού περιέχει τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα. [1] Επομένως κάθε χαρακτήρας της $\mathcal{W}$ επεκτείνεται μοναδικά σε χαρακτήρα της $C(\mathbb{T})$.

Αλλά γνωρίζουμε τους χαρακτήρες της $C(\mathbb{T})$: είναι ακριβώς οι εκτιμήσεις $\{\delta_z : z \in \mathbb{T}\}$ (παράγραφος 1). Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{T} \to \Omega(\mathcal{W}) : z \to \delta_z$$

είναι 1-1 και επί.

Δεν είναι μάλιστα δύσκολο να δείξει κανείς απευθείας (χωρίς τη χρήση του χαρακτηρισμού του $\Omega(C(K))$ ότι κάθε χαρακτήρας ϕ της $\mathcal{W}$ είναι εκτίμηση.

Απόδειξη Αν ϕ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{W}$, θέτω $z = \phi(f_1)$ (όπου $f_1(e^{it}) = e^{it}$) και ισχυρίζομαι ότι $z \in \mathbb{T}$ και $\phi = \delta_z$. Πράγματι, αφενός έχουμε $|z| = |\phi(f_1)| \leqslant \|\phi\|\|f_1\|_w = 1$. Αλλά από την άλλη, επειδή $f_1 \in \text{Inv}(\mathcal{W})$ άρα $\phi(f_1) \neq 0$ έχουμε $\phi(f_1^{-1}) = (\phi(f_1))^{-1}$, επομένως $\frac{1}{|z|} = |\phi(f_1^{-1})| \leqslant \|\phi\|\|f_1^{-1}\|_w = 1$. Έδειξα λοιπόν ότι $z \in \mathbb{T}$.

Τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ αν $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$ έχουμε

$$z^k = (\phi(f_1))^k = \phi(f_1^k) = \phi(f_k)$$

[1] Αυτό έπεται π.χ. από το Θεώρημα Stone-Weierstrass ή από το Θεώρημα Féjer.

δηλαδή $\phi(f_k) = \delta_z(f_k)$. Επομένως οι συνεχείς γραμμικές μορφές ϕ και δ_z ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$, που είναι πυκνή στην $\mathcal{W}$, άρα ταυτίζονται παντού. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Η απεικόνιση $\delta_z \to z$ είναι συνεχής, γιατί αν $\delta_{z_i} \stackrel{w^*}{\to} \delta_z$ τότε $\delta_{z_i}(f_1) \to \delta_z(f_1)$, άρα $z_i \to z$. Αφού οι δύο χώροι είναι συμπαγείς, η απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός.

Για κάθε $f \in \mathcal{W}$ και $\delta_z \in \Omega(\mathcal{W})$ όπου $z = e^{i\theta}$, έχουμε

$$\mathcal{G}(f)(\delta_z) = \delta_z(f) = f(e^{i\theta})$$

δηλαδή, αν "ταυτίσουμε" τους χώρους $\mathbb{T}$ και $\Omega(\mathcal{W})$, τότε η απεικόνιση Gelfand "ταυτίζεται" με την ταυτοτική απεικόνιση. Ειδικότερα, η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1. Επίσης, η εικόνα της $\mathcal{G}$ είναι πυκνή στην $C(\Omega(\mathcal{W}))$, γιατί η $\mathcal{W}$ είναι πυκνή στην $C(\mathbb{T})$.

Όμως ο μετασχηματισμός Gelfand δεν απεκονίζει την $\mathcal{W}$ επί της $C(\Omega(\mathcal{W}))$, γιατί η $\mathcal{W}$ δεν ισούται με την $C(\mathbb{T})$: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους δεν συγκλίνει απόλυτα. Ένα τέτοιο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η

$$g(e^{it}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{k \log k}.$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση, αλλά βεβαίως δεν συγκλίνει απόλυτα. (Ας θυμηθούμε επίσης ότι υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους δεν συγκλίνει).

Το επόμενο Θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά από τον N. Wiener με διαφορετικές μεθόδους. Σήμερα, είναι ένα άμεσο πόρισμα της θεωρίας Gelfand.

Θεώρημα 1 (Wiener). *Αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και δεν μηδενίζεται πουθενά στον $\mathbb{T}$, τότε η $1/f$ έχει και αυτή απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier.*
Με άλλα λόγια:
Αν $f \in \mathcal{W}$ και $f(e^{it}) \neq 0$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τότε $1/f \in \mathcal{W}$.

Απόδειξη Για κάθε $\phi = \delta_z \in \Omega(\mathcal{W})$ από την υπόθεση έχουμε $\phi(f) \neq 0$, οπότε, όπως έχουμε δείξει, $f \in \mathrm{Inv}(\mathcal{W})$. Δηλαδή υπάρχει $g \in \mathcal{W}$ ώστε $fg = \mathbf{1}$. Οι πράξεις όμως στην $\mathcal{W}$ έχουν ορισθεί *κατά σημείο*, οπότε $g(t) = 1/f(e^{it})$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.