# Συνέχεια μορφισμών

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C* άλγεβρες με μονάδα και $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας *-μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$. Τότε

**Πρόταση 1.** *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.*

*Απόδειξη* Αν $\lambda \notin \sigma(a)$ τότε $\lambda\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Επομένως $\Phi(\lambda\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - a) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$. [1] Αλλά $\Phi(\lambda\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - a) = \lambda\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - \Phi(a)$, άρα $\lambda\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - \Phi(a) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, οπότε $\lambda \notin \sigma(\Phi(a))$. □

**Πρόταση 2.** *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|\Phi(a)\| \leqslant \|a\|$.*

*Απόδειξη* Υποθέτουμε πρώτα ότι $a = a^*$, οπότε $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ και
$\|\Phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\Phi(a))\}$. Όμως $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ από την Πρόταση 1, άρα
$\|\Phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\Phi(a))\} \leqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|$.
Αν τώρα το $a \in \mathcal{A}$ είναι τυχόν, το $a^*a$ είναι αυτοσυζυγές οπότε $\|\Phi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\|$ όπως δείξαμε, και άρα

$$\|\Phi(a)\|^2 = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\| = \|\Phi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| = \|a\|^2 . \qquad \square$$

**Πρόταση 3.** *Αν $\Phi$ 1-1, τότε για κάθε $a = a^* \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.*

*Απόδειξη* Ξέρουμε ήδη ότι $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ισότητα, και θα δείξουμε ότι η $\Phi$ δεν είναι 1-1.

*Ισχυρισμός:* Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \sigma_{\mathcal{A}}(a) \to \mathbb{C}$ ισχύει η ισότητα $f(\Phi(a)) = \Phi(f(a))$.

*Απόδειξη Ισχυρισμού* Αυτό είναι άμεσο αν η $f$ είναι πολυωνυμική, $f(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$: τότε έχουμε $f(\Phi(a)) = \sum_{k=0}^n c_k(\Phi(a))^k = \Phi(\sum_{k=0}^n c_k a^k) = \Phi(f(a))$, αφού η $\Phi$ διατηρεί αθροίσματα, γινόμενα και την μονάδα.

Στη γενική περίπτωση, η $f$ προσεγγίζεται από μια ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)$, ομοιόμορφα στο $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ (Θεώρημα Weierstrass: ας θυμηθούμε ότι $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \mathbb{R}$). Από τη συνέχεια του συναρτησιακού λογισμού, έχουμε $\|p_n(a) - f(a)\|_{\mathcal{A}} \to 0$. Επειδή η $\Phi$ είναι συνεχής, έπεται ότι $\|\Phi(p_n(a)) - \Phi(f(a))\|_{\mathcal{B}} \to 0$.
Επειδή $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a))$, πάλι από τη συνέχεια του συναρτησιακού λογισμού για το $\Phi(a)$, έχουμε $\|p_n(\Phi(a)) - f(\Phi(a))\|_{\mathcal{B}} \to 0$. Όμως $p_n(\Phi(a)) = \Phi(p_n(a))$ όπως παρατηρήσαμε, και συνεπώς $f(\Phi(a)) = \lim_n p_n(\Phi(a)) = \lim_n \Phi(p_n(a)) = \Phi(f(a))$.

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αφού το $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a))$ είναι γνήσιο κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$, υπάρχει συνεχής *μη μηδενική* συνάρτηση $f : \sigma_{\mathcal{A}}(a) \to [0,1]$ που μηδενίζεται στο $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a))$. Από τον συναρτησιακό λογισμό, ορίζεται το στοιχείο $f(a) \in \mathcal{A}$ και μάλιστα $f(a) \neq 0$ αφού η $f \neq 0$. Το $\Phi(a)$ είναι αυτοσυζυγές στοιχείο της $\mathcal{B}$ και, αφού η $f$ είναι συνεχής στο $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a))$, ορίζεται το $f(\Phi(a)) \in \mathcal{B}$ και $f(\Phi(a)) = 0$ αφού $f|_{\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a))} = 0$. Δείξαμε όμως με τον Ισχυρισμό ότι $f(\Phi(a)) = \Phi(f(a))$. Συνεπώς $\Phi(f(a)) = 0$ ενώ $f(a) \neq 0$: η $\Phi$ δεν είναι 1-1. □

**Πρόταση 4.** *Αν η $\Phi$ είναι 1-1, τότε είναι ισομετρία.*

*Απόδειξη* Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ξέρουμε από την Πρόταση 2 ότι $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(x^*x)) = \sigma_{\mathcal{A}}(x^*x)$. Αλλά τα $\Phi(x^*x)$ και $x^*x$ είναι αυτοσυζυγή, οπότε η νόρμα τους ισούται με τη φασματική τους ακτίνα, δηλαδή $\|\Phi(x^*x)\| = \sup \sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(x^*x)) = \sup \sigma_{\mathcal{A}}(x^*x) = \|x^*x\|$ και άρα

$$\|\Phi(x)\|^2 = \|\Phi(x)^*\Phi(x)\| = \|\Phi(x^*x)\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 .$$

[1] Υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ με $x(\lambda\mathbf{1} - a) = (\lambda\mathbf{1} - a)x = \mathbf{1}$, άρα $\Phi(x)\Phi(\lambda\mathbf{1} - a) = \Phi(\lambda\mathbf{1} - a)\Phi(x) = \Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

**Πόρισμα 5.** *Αν* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *είναι 1-1 *-μορφισμός μεταξύ C* αλγεβρών, τότε η* $\Phi(\mathcal{A})$ *είναι C* υπάλγεβρα της* $\mathcal{B}$.

... Γιατί είναι πλήρης, αφού η Φ είναι ισομετρία.

**Παρατήρηση 6.** *Το σημαντικό είναι ότι το συμπέρασμα του Πορίσματος ισχύει χωρίς την απαίτηση να είναι η Φ 1-1:*

*Κάθε *-μορφισμός μεταξύ C* αλγεβρών έχει κλειστή εικόνα.*

Ο λόγος είναι ότι η Φ επάγει μια 1-1 απεικόνιση $\tilde{\Phi} : \mathcal{A}/\ker\Phi \to \mathcal{B}$. Και ο πυρήνας $J := \ker\Phi$ ενός *-μορφισμού είναι κλειστό αυτοσυζυγές ιδεώδες στην $\mathcal{A}$, ενώ είναι γνωστό ότι το πηλίκο $\mathcal{C} := \mathcal{A}/J$ είναι C* άλγεβρα, άρα η $\tilde{\Phi}$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός, οπότε η εικόνα $\Phi(\mathcal{A}) = \tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ είναι κλειστή.

Σε μια C* άλγεβρα, η νόρμα καθορίζεται από την αλγεβρική δομή, αφού $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup\sigma(a^*a)$. Συνεπώς, σε μια *-άλγεβρα υπάρχει το πολύ μια νόρμα ως προς την οποία είναι C* άλγεβρα. Ισχύει όμως η ακόλουθη ισχυρότερη Πρόταση:

**Πρόταση 7** (Μοναδικότητα της νόρμας)**.** *Αν* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *είναι C* άλγεβρα και* $\|\cdot\|'$ *μια νόρμα στην* $\mathcal{A}$ *με* $\|ab\|' \leqslant \|a\|' \|b\|'$ *και* $\|a^*a\|' = \|a\|'^2$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$, *τότε* $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$.

*Απόδειξη* Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}'$ την πλήρωση της $(\mathcal{A}, \|\cdot\|')$. Επειδή εξ υποθέσεως οι πράξεις και η ενέλιξη είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|'$, η $\mathcal{A}'$ είναι C* άλγεβρα. Θεωρώ

$$\Phi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|') : a \to a$$

την ταυτοτική απεικόνιση. Είναι προφανώς *-μορφισμός και 1-1. Συνεπώς από την πρόταση 3 είναι ισομετρία. Δηλαδή $\|a\|' = \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. □