Νόρμες σε τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert

Το τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert αναπαρίσταται μέσω τελεστών μεταξύ των χώρων, καθώς και μέσω γραμμικών μορφών στον χώρο των τελεστών. Ορίζονται διάφορες νόρμες στο τανυστικό αυτό γινόμενο και οι αντίστοιχες πληρώσεις αναπαριστώνται επίσης ως τελεστές.

1 Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο και τελεστές χώρων Hilbert

Αν H, K είναι[1] χώροι Hilbert, θεωρούμε τον τοπολογικό δυικό K^*. Κάθε συνεχής γραμμική μορφή $y^* : K \to \mathbb{C}$ είναι της μορφής $y^* : z \mapsto \langle z, y \rangle$ όπου $y \in K$ (Θεώρημα Riesz) και η απεικόνιση $y \mapsto y^* : K \to K^*$ είναι αντιγραμμική ισομετρία επί.

Μια αναπαράσταση Για κάθε $(x, y^*) \in H \times K^*$ θεωρούμε τον φραγμένο τελεστή

$$xy^* : K \to \mathbb{C} \to H : z \mapsto \langle z, y \rangle \mapsto \langle z, y \rangle x.$$

Η απεικόνιση

$$\phi : H \times K^* \to \mathcal{B}(K, H) : (x, y^*) \mapsto xy^*$$

είναι διγραμμική. Επομένως ορίζεται μοναδικά μια γραμμική απεικόνιση

$$\Phi : H \otimes K^* \to \mathcal{B}(K, H) : x \otimes y^* \mapsto xy^* .$$

Δηλαδή για κάθε $u = \sum_i x_i \otimes y_i^* \in H \otimes K^*$ έχουμε

$$\Phi(u) := \tilde{u} : K \to H : z \mapsto \sum_i \langle z, y_i \rangle x_i := \sum_i x_i y_i^*(z).$$

Παρατηρούμε ότι ο $\tilde{u}$ είναι *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης.
Αντίστροφα,

Πρόταση 1. *Κάθε* φραγμένος *τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : K \to H$ είναι της μορφής $T = \hat{u}|_H$ όπου $u \in H \otimes K^*$. Η απεικόνιση*

$$\Phi : u \to \tilde{u} : H \otimes K^* \to \mathcal{FB}(K, H)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (όπου $\mathcal{FB}(K, H)$ ο χώρος των φραγμένων *τελεστών πεπερασμένης τάξης).*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα της απεικόνισης $\Phi : u \to \tilde{u}$ έπεται από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου.

Δείχνουμε ότι η Φ είναι 1-1: Αν $\tilde{u} = 0$ τότε, επιλέγοντας μια αναπαράσταση $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ με $\{x_i\}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο έχουμε $\sum\limits_i x_i y_i^*(z) = 0 \in H$ για κάθε $z \in K$, άρα $y_i^*(z) = 0$ για κάθε z και i λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας, άρα $y_i^* = 0$ για κάθε i και συνεπώς $u = 0$.

Δείχνουμε ότι είναι επί: Έστω $T : H \to K$ ένας *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης και $\{x_1, \dots x_n\} \subseteq H$ μια *ορθοκανονική* βάση του συνόλου τιμών του (που είναι πεπερασμένης διάστασης). Αφού κάθε $T(z)$ ανήκει στον span$\{x_i\}$, υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$ στο $\mathbb{C}$ ώστε $T(z) = \sum_i \lambda_i(z) x_i$. Για κάθε j έχουμε

$$\langle T(z), x_j \rangle = \sum_i \lambda_i(z) \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j(z)$$

[1] file: newten, compiled 24 Ιανουαρίου 2021

άρα (αφού T συνεχής) η απεικόνιση $z \to \lambda_j(z)$ είναι *συνεχής* γραμμική μορφή στο χώρο Hilbert K, επομένως υπάρχει διάνυσμα $y_j \in K$ ώστε $\lambda_j(z) = \langle z, y_j \rangle$.

Δείξαμε ότι $T(z) = \sum_i \langle z, y_i \rangle x_i = \tilde{u}(z)$ για κάθε $z \in K$, όπου $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$. □

Άλλη αναπαράσταση Για κάθε $(x, y^*) \in H \times K^*$ θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\omega_{xy} : \mathcal{B}(H, K) \to \mathbb{C} : A \mapsto \omega_{xy}(A) := \langle Ax, y \rangle$$

η οποία είναι συνεχής. Η απεικόνιση

$$H \times K^* \to (\mathcal{B}(K, H))^* : (x, y^*) \mapsto \omega_{xy}$$

είναι διγραμμική. Επομένως ορίζεται μοναδικά μια γραμμική απεικόνιση

$$\Omega : H \otimes K^* \to (\mathcal{B}(K, H))^* : x \otimes y^* \mapsto \omega_{xy} \, .$$

Παρατήρηση 2. *Η απεικόνιση Ω είναι 1-1.*

Απόδειξη. Αν $\Omega(u) = 0$ τότε, επιλέγοντας μια αναπαράσταση $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ με $\{x_i\}$ ορθοκανονικό σύνολο έχουμε $\sum\limits_i \langle Ax_i, y_i \rangle = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Θέτοντας $A = y_j x_j^*$ έχουμε

$$0 = \sum_i \Big\langle (y_j x_j^*) x_i, y_i \Big\rangle = \sum_i \Big\langle \langle x_i, x_j \rangle y_j, y_i \Big\rangle = \langle y_j, y_j \rangle \, ,$$

άρα $y_j = 0$. Αυτό ισχύει για κάθε j και συνεπώς $u = 0$. □

Σχέση των δύο αναπαραστάσεων Αν $x \in H$, $y \in K$ και $A \in B(H, K)$, έχουμε δείξει ότι $\langle Ax, y \rangle = \mathrm{tr}(Axy^*)$. [2]

Αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i^* \in H \times K^*$ και $\tilde{u} := \Phi(u) \in \mathcal{B}(K, H)$, για κάθε $A \in B(H, K)$ έχουμε

$$\Omega(u)(A) = \sum_i \omega_{x_i y_i}(A) = \sum_i \langle Ax_i, y_i \rangle = \sum_i \mathrm{tr}(Ax_i y_i^*) = \mathrm{tr}(A \sum_i x_i y_i^*) = \mathrm{tr}(A\tilde{u}) \, .$$

Επομένως οι Φ και Ω συνδέονται ως εξής: για κάθε $u \in H \times K^*$,

$$\Omega(u)(A) = \mathrm{tr}(A\Phi(u)), \qquad A \in \mathcal{B}(H, K) \, . \tag{*}$$

2 Νόρμες στο τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert

Εκτός από τη νόρμα $\|u\|_{hs} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{hs}}$ που ορίζεται στο τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert, μπορούμε να ορίσουμε κι άλλες νόρμες, που δεν προέρχονται από εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1. *Έστω H, K χώροι Hilbert.*

(α) *Η* injective norm $\|\cdot\|_\lambda$ *στον $H \otimes K^*$ μπορεί να ορισθεί ως εξής:*

$$\|u\|_\lambda := \|\Phi(u)\|_{\mathcal{B}(K,H)} \, .$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ τότε

$$\Big\| \sum_i x_i \otimes y_i^* \Big\|_\lambda := \Big\| \sum_i x_i y_i^* \Big\|_{\mathcal{B}(K,H)} = \sup \left\{ \Big\| \sum_i \langle z, y_i \rangle x_i \Big\|_H : z \in \mathrm{ball}(K) \right\} .$$

[2] Έχουμε $Axy^* = A(xy^*) : K \to H \to K$, οπότε αν θέσω $e_0 = \frac{y}{\|y\|}$ και επεκτείνω σε ορθοκανονική βάση $\{e_0\} \cup \{e_i : i \in I\}$ του K, έχω $\mathrm{tr}(Axy^*) = \langle Axy^* e_0, e_0 \rangle + \sum_i \langle Axy^* e_i, e_i \rangle = \langle Axy^* e_0, e_0 \rangle = \langle \langle e_0, y \rangle Ax, e_0 \rangle = \|y\| \langle Ax, e_0 \rangle = \langle Ax, y \rangle$.

Ονομάζουμε $H \otimes_\lambda K^*$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K^*, \|\cdot\|_\lambda)$.

(β) *Η* projective norm $\|\cdot\|_\gamma$ *στον* $H \otimes K^*$ *μπορεί να ορισθεί ως εξής:*

$$\|u\|_\gamma := \|\Omega(u)\|_{(\mathcal{B}(H,K))^*} \,.$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ *τότε*

$$\left\| \sum_i x_i \otimes y_i^* \right\|_\gamma := \left\| \sum_i \omega_{x_i y_i} \right\|_{(\mathcal{B}(K,H))^*} = \sup \left\{ \left| \sum_i \langle A x_i, y_i \rangle \right| \, : A \in \mathrm{ball}(\mathcal{B}(H,K)) \right\} .$$

Ονομάζουμε $H \otimes_\gamma K^*$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K^*, \|\cdot\|_\gamma)$.

Έστω $u \in H \otimes K^*$ και $T := \Phi(u) \in \mathcal{FB}(K,H)$. Γνωρίζουμε ότι ο T μπορεί να γραφεί στη μορφή $T = \sum_{k=1}^n s_k f_k e_k^*$, όπου και οι δυο οικογένειες $\{f_k\} \subseteq H$ και $\{e_k\} \subseteq K$ είναι ορθοκανονικές και οι s_k είναι θετικοί αριθμοί, είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του τελεστή $|T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(K)$ με ιδιοδιανύσματα e_k.

Έπεται ότι κάθε $u \in H \otimes K^*$ μπορεί να γραφεί $u = \Phi^{-1}(T) = \sum_{k=1}^n s_k f_k \otimes e_k^*$.

Παρατήρηση 3. *Αν $u \in H \otimes K^*$,*

$$\|u\|_\gamma = \inf\{\sum_i \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_i x_i \otimes y_i^*\} \,.$$

Μάλιστα, το infimum είναι minimum.

Απόδειξη. Για κάθε γραφή $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ του u, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|x_i \otimes y_i^*\|_\gamma = \|x_i\|\|y_i\|$, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|u\|_\gamma \leqslant \sum_i \|x_i \otimes y_i^*\|_\gamma \leqslant \sum_i \|x_i\|\|y_i\| \,.$$

οπότε παίρνοντας infimum ως προς όλες τις αναπαραστάσεις του u ως άθροισμα simple tensors, έχουμε

$$\|u\|_\gamma \leqslant \inf\{\sum_i \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_i x_i \otimes y_i^*\} \,.$$

Για την ισότητα, παρατηρούμε ότι μια γραφή του u είναι η $u = \sum_{k=1}^n (s_k f_k) \otimes e_k^*$. □

Παρατήρηση 4. *Για κάθε $u \in H \otimes K^*$ έχουμε*

$$\|\Omega(u)\| = \mathrm{tr}(|\Phi(u)|) \,.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $\Phi(u) = \sum_{k=1}^n s_k f_k e_k^*$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (*) παρατηρούμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(H,K)$ έχουμε

$$\Omega(u)(A) = \mathrm{tr}(A\Phi(u)) = \mathrm{tr}(\sum_{k=1}^n s_k A f_k e_k^*) = \sum_{k=1}^n s_k \mathrm{tr}(A f_k e_k^*) = \sum_{k=1}^n s_k \langle A f_k, e_k \rangle$$

$$\text{άρα} \quad |\Omega(u)(A)| \leqslant \sum_{k=1}^n s_k |\langle A f_k, e_k \rangle| \leqslant \sum_{k=1}^n s_k \|A\| = \mathrm{tr}(|T|)\, \|A\|$$

οπότε $\|\Omega(u)\| \leqslant \mathrm{tr}(|T|)$. Στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα, γιατί θέτοντας $A = \sum_k e_k f_k^*$ έχουμε $\|A\| = \max \|e_k f_k^*\| = 1$ (εξηγείστε γιατί) και $\Omega(u)(A) = \sum_k s_k \langle A f_k e_k \rangle = \sum_k s_k = \mathrm{tr}|T|$. □

Έχουμε λοιπόν,

$$\|u\|_\gamma = \|\Omega(u)\| = \mathrm{tr}|T| = \sum_{k=1}^n s_k$$

$$\text{και} \quad \|u\|_\lambda = \|\Phi(u)\| = \|T\| = \||T|\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} s_k \,.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\|u\|_{hs}^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n s_k f_k \otimes e_k, \sum_{i=1}^n s_i f_i \otimes e_i \right\rangle = \sum_{k,i} s_k s_i \langle f_k, f_i\rangle\langle e_k, e_i\rangle \\ &= \sum_k s_k^2 = \mathrm{tr}(TT^*)\,,\end{aligned}$$

επειδή και οι δυο οικογένειες $\{f_k\}$ και $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Κατά συνέπεια,

$$\|u\|_\lambda \leqslant \|u\|_{hs} \leqslant \|u\|_\gamma \quad \forall u \in H \otimes K^*\,.$$

Σχόλιο Αν αναπαραστήσουμε τον $\Phi(u)|$ ως διαγώνιο πίνακα $\mathrm{diag}(s_k)$, τότε η $\|u\|_\lambda$ αντιστοιχεί στην ℓ^∞ νόρμα του $\mathrm{diag}(s_k)$, η $\|u\|_{hs}$ αντιστοιχεί στην ℓ^2 νόρμα και η $\|u\|_\gamma$ στην ℓ^1 νόρμα.

Γενικότερα αν επίσης $v \in H \otimes K^*$ και $S = \Phi(v)$, μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι

$$\langle u, v\rangle_{hs} = \mathrm{tr}(S^*T)\,.$$

Επέκταση στις πληρώσεις Η απεικόνιση

$$\Phi : (H \otimes K^*, \|\cdot\|_\lambda) \to (\mathcal{FB}(K,H), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(K,H)})$$

είναι ισομετρία. Συνεπώς η πλήρωση $H \otimes_\lambda K^*$ του $(H \otimes K^*, \|\cdot\|_\lambda)$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την κλειστή θήκη του χώρου $\mathcal{FB}(K,H)$ στον $\mathcal{B}(K,H)$. Αυτή η κλειστή θήκη είναι ο χώρος $\mathcal{K}(K,H)$ των συμπαγών τελεστών $K \to H$. Αυτό προκύπτει απο το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές. Υπενθυμίζουμε:

Ορισμός 2. *Μια γραμμική απεικόνιση $T : K \to H$ λέγεται συμπαγής τελεστής αν η $T(\mathrm{ball}K)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του H.*

Ειδική περίπτωση του Φασματικού Θεωρήματος για συμπαγείς τελεστές είναι η ακόλουθη

Θεώρημα 5. *Κάθε θετικός συμπαγής τελεστής A σε χώρο Hilbert K διαγωνοποιείται ως προς μια ορθοκανονική βάση: υπάρχει (αριθμήσιμη) ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $(\ker A)^\perp$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Η ακολουθία $\{s_n\}$ των (μη μηδενικών) ιδιοτιμών του A είναι μηδενική ή πεπερασμένη και*

$$A = \sum_n s_n e_n e_n^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(K)$.

Έπεται ότι κάθε συμπαγής τελεστής $T = U|T| \in \mathcal{B}(K,H)$ είναι το όριο (ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(K,H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης $\sum_{n=1}^N s_n(Ue_n)e_n^*$, όπου $|T| = \sum_n s_n e_n e_n^*$.

Από την άλλη μεριά, ο χώρος $\mathcal{FB}(K,H)$ μπορεί να εφοδιασθεί και με την trace norm, $\|T\|_t := \mathrm{tr}(|T|)$. Όπως είδαμε προηγουμένως, αν $u \in H \otimes K^*$, τότε $\|u\|_\gamma = \sum_{k=1}^n s_k = \mathrm{tr}(|\tilde{u}|)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$(H \otimes K^*, \|\cdot\|_\gamma) \to (\mathcal{FB}(K,H), \|\cdot\|_t)$$

είναι ισομετρία. Αυτό σημαίνει ότι η πλήρωση $H \otimes_\gamma K^*$ ως προς την $\|\cdot\|_\gamma$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την κλειστή θήκη $\mathcal{T}(K,H)$ του χώρου των πεπερασμένης τάξης φραγμένων τελεστών, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_t$. Ο $\mathcal{T}(K,H)$ είναι ο χώρος των τελεστών trace class. Αφού $\|\cdot\|_t \geqslant \|\cdot\|_{\mathcal{B}(K,H)}$, έπεται ότι $\mathcal{T}(K,H) \subseteq \mathcal{K}(K,H)$. [3] [4]

[3] Αν μια ακολουθία από τον $\mathcal{FB}(K,H)$ είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_t$, τότε είναι βασική και ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(K,H)}$, επομένως το όριό της είναι συμπαγής τελεστής.

[4] *Πληροφορίες:* Ο χώρος των τελεστών *Hilbert-Schmidt* $\mathcal{C}_2(K,H)$ είναι η κλειστή θήκη του χώρου των πεπερασμένης τάξης φραγμένων τελεστών, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{HS}$ που ορίζεται από $\|T\|_{HS} = \sqrt{\mathrm{tr}(T^*T)}$. Ο χώρος αυτός είναι χώρος Hilbert, ισομετρικά ισόμορφος με τον $(H \otimes K^*, \|\cdot\|_{hs})$. Ισχύει ότι $\mathcal{T}(K,H) \subseteq \mathcal{C}_2(K,H) \subseteq \mathcal{K}(K,H)$ (πρβλ. $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^\infty$).

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\Omega : (H \otimes K^*, \|\cdot\|_\gamma) \to ((\mathcal{B}(H,K))^*, \|\cdot\|_{(\mathcal{B}(H,K))^*})$$

είναι επίσης ισομετρία. Συνεπώς η πλήρωση $H \otimes_\gamma K^*$ είναι επίσης ισομετρικά ισόμορφη με έναν κλειστό υπόχωρο του τοπολογικού δυικού του $\mathcal{B}(H,K)$. Αυτός ο κλειστός υπόχωρος συμβολίζεται $\mathcal{B}_*(H,K)$ και ονομάζεται ο *χώρος των ultraweakly συνεχών γραμμικών μορφών* στον $\mathcal{B}(H,K)$.

Θα δείξουμε στην επόμενη παράγραφο ότι ο δυικός του $H \otimes_\gamma K^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H,K)$.

Συνοψίζοντας, ο χώρος $(H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)$ είναι ισομετρικός με τον χώρο $(\mathcal{T}(K,H), \|\cdot\|_t)$ των τελεστών trace class, και είναι επίσης ισομετρικός με τον χώρο $(\mathcal{B}_*(H,K), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H,K)^*})$ των ασθενώς συνεχών γραμμικών μορφών στον $\mathcal{B}(H,K)$.*

Εξάλλου, ο χώρος $(H \otimes_\lambda K^*, \|\cdot\|_\lambda)$ είναι ισομετρικός με τον χώρο $(\mathcal{B}(K,H), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(K,H)})$

3 Ο προδυικός του $\mathcal{B}(H,K)$

Θα αποδείξουμε ότι ο δυϊκός χώρος του $(H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H,K)$.

Έστω $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_A : H \otimes K^* \to \mathbb{C}$$

από τον τύπο
$$\phi_A(x \otimes y^*) = \omega_{x,y}(A), \qquad (x,y) \in H \times K.$$

και επεκτείνουμε γραμμικά, δηλαδή [5]
$$\phi_A(\sum_i x_i \otimes y_i^*) = \sum_i \langle Ax_i, y_i \rangle).$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση ϕ_A είναι καλά ορισμένη γραμμική. Επίσης, είναι συνεχής ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ διότι για κάθε $u \in H \otimes K^*$ και κάθε γραφή $u = \sum_i x_i \otimes y_i^*$ του u έχουμε

$$|\phi_A(\sum_i x_i \otimes y_i^*)| \leqslant \sum_i |\langle Ax_i, y_i \rangle| \leqslant \|A\| \sum_i \|x_i\| \, \|y_i\|$$
$$\text{άρα} \quad |\phi_A(u)| \leqslant \|A\| \, \|u\|_\gamma \ ,$$

από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\gamma$. Επομένως η ϕ_A επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή ορισμένη στην πλήρωση $H \otimes_\gamma K^*$, δηλαδή $\phi_A \in (H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)^*$ και $\|\phi_A\| \leqslant \|A\|$.

Έστω αντίστροφα $\psi \in (H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)^*$. Θα βρω $A \in \mathcal{B}(H,K)$ ώστε $\psi = \phi_A$. Κάθε ζεύγος $(x,y) \in H \times K$ ορίζει έναν αριθμό $\psi(x \otimes y^*) \in \mathbb{C}$. Δημιουργείται λοιπόν μια απεικόνιση

$$b : H \times K \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \psi(x \otimes y^*).$$

Επειδή η απεικόνιση $(x,y) \to x \otimes y^*$ είναι sesquilinear και η ψ είναι γραμμική, η b είναι sesquilinear. Επίσης,
$$|b(x,y)| = |\psi(x \otimes y^*)| \leqslant \|\psi\| \|x \otimes y^*\|_\gamma = \|\psi\| \|x\| \|y\|$$

άρα η b είναι φραγμένη (από $\|\psi\|$). Συνεπώς από το Θεώρημα Riesz υπάρχει $A_\psi \in \mathcal{B}(H,K)$ ώστε

$$b(x,y) = \langle A_\psi x, y \rangle \quad \text{για κάθε } (x,y) \in H \times K$$

δηλαδή
$$\psi(x \otimes y^*) = \langle A_\psi x, y \rangle = \omega_{x,y}(A_\psi)$$

και
$$|\langle A_\psi x, y \rangle| = |\psi(x \otimes y^*)| \leqslant \|\psi\| \|x \otimes y^*\|_\gamma = \|\psi\| \|x\| \|y\|$$

[5] Παρατηρούμε ότι $\phi_A(u) = \Omega(u)(A)$, όμως εδώ η «μεταβλητή» είναι το u και όχι το A.

για κάθε $x, y \in H \times$, άρα

$$\|A_\psi\| \leqslant \|\psi\|.$$

Επειδή ο χώρος $H \otimes_\gamma K^*$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{x \otimes y^* : x, y \in H\}$ ως προς τη $\|\cdot\|_\gamma$ και οι απεικονίσεις ψ και ϕ_{A_ψ} είναι γραμμικές και συνεχείς, οι σχέσεις

$$\psi(x \otimes y^*) = \omega_{x,y}(A) = \phi_{A_\psi}(x \otimes y^*)$$

για κάθε $(x, y) \in H \times K$ δείχνουν ότι $\psi = \phi_{A_\psi}$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $A \to \phi_A$ απεικονίζει τον $\mathcal{B}(H, K)$ *επί* του δυικού του $(H \otimes K^*, \|\cdot\|_\gamma)$ που βεβαίως ταυτίζεται με τον δυικό του $H \otimes_\gamma K^*$.

Τέλος παρατηρούμε ότι, αν $\psi = \phi_A$, τότε

$$\langle A_\psi x, y\rangle = \phi_A(x \otimes y^*) = \langle Ax, y\rangle$$

γαι κάθε $(x, y) \in H \times K$ (ορισμός του A_ψ), άρα $A_\psi = A$. Επομένως η ανισότητα $\|A_\psi\| \leqslant \|\psi\|$ δείχνει ότι $\|A\| \leqslant \|\phi_A\|$. Είχαμε όμως δείξει ότι $\|\phi_A\| \leqslant \|A\|$, συνεπώς ισχύει ισότητα.

Δείξαμε δηλαδή ότι η απεικόνιση

$$(\mathcal{B}(H, K), \|\cdot\|) \to (H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)^* : A \mapsto \phi_A$$

που είναι προφανώς γραμμική, είναι ισομετρία και επί:

Πρόταση 6. *Ο χώρος $\mathcal{B}(H, K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρου $(H \otimes_\gamma K^*, \|\cdot\|_\gamma)$. μέσω της απεικόνισης*

$$A \to \phi_A, \quad \textit{όπου} \quad \phi_A(u) = \Omega(u)(A),\ (A \in \mathcal{B}(H, K),\ u \in H \otimes_\gamma K^*).$$

Σχόλια (α) Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το «μη μεταθετικό ανάλογο» του κλασικού δυισμού $(\ell_1)^* \simeq \ell^\infty$.

Μάλιστα, μπορεί κανείς να δείξει ότι ο δυικός του χώρου των συμπαγών τελεστών είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $H \otimes_\gamma K^*$, κατ' αναλογία με τον κλασικό δυισμό $(c_0)^* \simeq \ell^1$.

(β) Χρησιμοποιήσαμε την έκφραση «ο προδυικός του $\mathcal{B}(H, K)$», γιατί είναι πράγματι μοναδικός: αν ένας χώρος Banach έχει την ιδιότητα, ο E^* να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H, K)$ τότε αποδεικνύεται ότι ο E είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $H \otimes_\gamma K^*$.

Αυτή η μοναδικότητα δεν ισχύει πάντα: για παράδειγμα, ο ℓ^1 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυικό του c_0, αλλά και με τον δυικό του c (=συγκλίνουσες ακολουθίες), οι οποίοι δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι μεταξύ τους. Μπορεί κανείς να δει την συζήτηση στο

`https://math.stackexchange.com/questions/153859/what-is-the-precise-definition-of-predual`