Ο θετικός κώνος σε μια C* άλγεβρας

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται* θετικό *(γράφουμε $a \geqslant 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Θέτουμε*

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geqslant 0\}.$$

Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leqslant b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παραδείγματα 1.
• *Στον $C_0(X)$: $f \geqslant 0$ αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in X$ (γιατί $\sigma(f) = f(X) \cup \{0\}$).*

• *Στην $M_n(\mathbb{C})$: $a \geqslant 0$ αν-ν ο a διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα αν-ν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle ax, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.*

• *Στην $\mathcal{B}(H)$: $a \geqslant 0$ αν-ν $\langle a\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in H$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής με $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Τότε η συνάρτηση $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ ορίζεται στο $\sigma(a)$ και είναι συνεχής, άρα από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $b = f(a) = \Phi_c(f) \in \mathcal{B}(H)$ και έχουμε $b^* = \Phi_c(f^*) = \Phi_c(f) = b$ και $b^2 = \Phi_c(f)^2 = \Phi_c(f^2) = \Phi_c(\mathrm{id}) = a$. Έπεται ότι για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\langle ax, x\rangle = \langle b^2x, x\rangle = \langle b^*bx, x\rangle = \langle bx, bx\rangle \geqslant 0.$$

Αντίστροφα, έστω $a \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle ax, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in H$. Τότε έπεται ότι $\langle ax, y\rangle = \langle a^*x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$, δηλαδή ότι $a = a^*$. Πράγματι, για κάθε $\xi \in H$ έχουμε $\langle a^*\xi, \xi\rangle = \langle \xi, a\xi\rangle = \langle a\xi, \xi\rangle$ (αφού $\langle a\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$) και τώρα από την ταυτότητα πολικότητας[1]

$$4\langle ax, y\rangle = \sum_{n=0}^{3} i^n \langle a(x + i^n y), x + i^n y\rangle$$

προκύπτει το ζητούμενο.

Επίσης, αν $\lambda < 0$ τότε $\lambda \notin \sigma(a)$. Πράγματι: Εύκολα φαίνεται ότι $\|(a - \lambda\mathbf{1})x\|^2 \geqslant \lambda^2 \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$. Από αυτό προκύπτει ότι ο τελεστής $a - \lambda\mathbf{1}$ είναι 1-1 και το σύνολο τιμών του είναι πυκνό και κλειστό, δηλαδή ο $a - \lambda\mathbf{1}$ είναι επί, και επίσης από την ίδια ανισότητα προκύπτει ότι ο αντίστροφός του είναι φραγμένος (από $1/|\lambda|$). (Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση).

Παρατήρηση Η απόδειξη αυτή μεταφέρεται και στην $M_n(\mathbb{C})$. Στην περίπτωση αυτή βέβαια το τελευταίο βήμα είναι απλούστερο, γιατί κάθε $\lambda \in \sigma(a)$ είναι ιδιοτιμή: υπάρχει λοιπόν μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ ώστε $ax = \lambda x$ οπότε $\lambda\langle x, x\rangle = \langle ax, x\rangle \geqslant 0$ και άρα $\lambda \geqslant 0$.

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα, $a = a^* \in \mathcal{A}$ και $f \in C(\sigma(a))$. Τότε:*
$f(a) \geqslant 0$ αν και μόνον αν $f \geqslant 0$, δηλαδή $f(\lambda) \geqslant 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Φασματικής απεικόνισης έχουμε $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\}$. Επομένως το $f(a) \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγές αν και μόνον αν $f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}$, δηλ. ανν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(a)$, και είναι θετικό αν και μόνον αν είναι αυτοσυζυγές και $f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλ. ανν η f παίρνει πραγματικές και μη αρνητικές τιμές στο $\sigma(a)$. □

[1] Απόδειξη: αναπτύσσουμε το άθροισμα...

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Θέτουμε
$$\mathcal{A}_{sa} := \{a \in \mathcal{A} : a = a^*\}.$$
Ο χώρος $\mathcal{A}_{sa}$ είναι κλειστός πραγματικός υπόχωρος του χώρου $\mathcal{A}$, δεν είναι όμως εν γένει άλγεβρα.

Πρόταση 3. *Αν $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα, το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι* κώνος *στον $\mathcal{A}_{sa}$, δηλαδή:*

$$a, b \in \mathcal{A}_+, \ \lambda \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Για τον δεύτερο, θα χρειασθεί ένα λήμμα:

Λήμμα 4. *Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα, αν $x = x^*$ και $\|x\| \leqslant \mu$, τότε*

$$-\mu\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mu\mathbf{1}$$
$$\textit{και} \quad x \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu\mathbf{1}\| \leqslant \mu\,.$$

Απόδειξη. Αφού $x = x^*$, έχουμε $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης αν $\lambda \in \sigma(a)$ έχουμε $|\lambda| \leqslant \|x\| \leqslant \mu$. Συνεπώς $\sigma(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|] \subseteq [-\mu, \mu]$. Επομένως,[2] $\sigma(x + \mu\mathbf{1}) \subseteq [0, 2\mu]$, άρα $x + \mu\mathbf{1} \geqslant 0$ και ομοίως $\mu\mathbf{1} - x \geqslant 0$. Άρα $-\mu\mathbf{1} \leqslant x$ και $x \leqslant \mu\mathbf{1}$.

Επίσης, επειδή η φασματική ακτίνα ενός φυσιολογικού στοιχείου είναι ίση με τη νόρμα του, έχουμε

$$\|x - \mu\mathbf{1}\| = \rho(x - \mu\mathbf{1}) = \sup\{|\mu - \lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\{(\mu - \lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$$

το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο από μ αν και μόνον αν $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. □

Απόδειξη της Πρότασης 3. Μπορούμε να θεωρούμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα (αλλιώς, δουλεύουμε στην μοναδοποίηση $\mathcal{A}^\sim$).

Είναι φανερό ότι αν $a \geqslant 0$ και $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda a \geqslant 0$.

Τώρα, για να δείξουμε ότι το άθροισμα δυο θετικών στοιχείων είναι θετικό αρκεί, αν a and b είναι θετικά στοιχεία νόρμας το πολύ 1, να δείξουμε ότι το $\frac{a+b}{2}$ είναι θετικό. Από το Λήμμα έχουμε ότι $\|a - \mathbf{1}\| \leqslant 1$ και $\|b - \mathbf{1}\| \leqslant 1$, οπότε

$$\left\|\mathbf{1} - \frac{a+b}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|(\mathbf{1} - a) + (\mathbf{1} - b)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|\mathbf{1} - a\| + \|\mathbf{1} - b\|) \leqslant 1\,,$$

συνεπώς, αφού το $\frac{a+b}{2}$ είναι αυτοσυζυγές, πάλι από το Λήμμα προκύπτει ότι $\frac{a+b}{2} \geqslant 0$. □

Πρόταση 5. *Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.*

Απόδειξη. (α) Από το Λήμμα έχουμε ότι

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a = a^* \text{ και } \|a - \|a\|\,\mathbf{1}\| \leqslant \|a\|\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι κλειστό, από τη συνέχεια της ενέλιξης και της νόρμας.

(β) Αν $a \in \mathcal{A}_+$ και $-a \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και $\sigma(-a) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή $\sigma(a) \subseteq \{0\}$. Τότε όμως, αφού $a = a^*$, έχουμε $\|a\| = \rho(a) = 0$, άρα $a = 0$. □

Ο επόμενος στόχος είναι να δείξουμε ότι ένα στοιχείο μιας C* άλγεβρας είναι θετικό αν και μόνον αν έχει τετραγωνική ρίζα. Η μια κατεύθυνση προκύπτει από το συναρτησιακό λογισμό:

[2] $t \in \sigma(x + \mu\mathbf{1}) \iff x + \mu\mathbf{1} - t\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \iff t - \mu \in \sigma(x)$, και $|t - \mu| \leqslant \mu \iff 0 \leqslant t \leqslant 2\mu$

Πρόταση 6. *Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα*

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \textit{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \textit{ ώστε } \; a = b^2.$$

Απόδειξη. Αν $a = b^2$ όπου $b \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(b)\}$ από το Λήμμα φασματικής απεικόνισης. Επομένως, αφού $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$ έχουμε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και συνεπώς $a \geqslant 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $a \geqslant 0$. Τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ οπότε η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a)$. Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό λογισμό (αφού $a = a^*$) έχουμε ένα στοιχείο $b := f(a) = \Phi_c(f)$ της $\mathcal{A}$ το οποίο είναι θετικό αφού η $f(t) \geqslant 0$ γι κάθε $t \in \sigma(a)$ (Πρόταση 2). Πάλι απ' τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $b^2 = (\Phi_c(f))^2 = \Phi_c(f^2) = a$. ☐

Παρατήρηση 7. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ ανήκει στην C* άλγεβρα $C^*(a)$.*

Απόδειξη. $\sqrt{a} = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$. Εφόσον $f(0) = 0$, το $f(a)$ ανήκει στην $C^*(a)$. ☐

Παρατήρηση 8. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $c \in \mathcal{A}_+$ και $c^2 = a$, τότε $c = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in \sigma(a)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το c μετατίθεται με το a (αφού $a = c^2$). Συνεπώς μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του a, άρα και με το $b := f(a)$, που είναι όριο πολυωνύμων του a.

Έπεται ότι η C* άλγεβρα $C^*(b, c)$ που παράγεται από τα θετικά στοιχεία b, c είναι μεταθετική. Κατά συνέπεια είναι ισομετρικά *-ισομορφική με μια C* άλγεβρα της μορφής $C_0(X)$. Τα b και c αντιστοιχούν σε μη αρνητικές συναρτήσεις f και g στο X, οι οποίες αναγκαστικά θα είναι ίσες, αφού $f^2 = g^2$ (γιατί $b^2 = a = c^2$). Άρα $b = c$. ☐

Πρόταση 9. *Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ γράφεται ως διαφορά $a = a_+ - a_-$ δυο θετικών στοιχείων $a_+, a_- \in \mathcal{A}$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(a)$) ώστε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.*

Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f_+(t) = \begin{cases} t & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.
Θέτουμε $a_+ = f_+(a)$ και $a_- = a_+ - a = f_-(a)$ όπου $f_-(t) = f_+(t) - t$. Επειδή $f_\pm \geqslant 0$, τα a_+, a_- είναι θετικά στοιχεία, και επειδή $f_+f_- = 0$ έχουμε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. ☐

Θεώρημα 10. *Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$, κάθε στοιχείο της μορφής a^*a είναι θετικό.*

Απόδειξη. Βεβαίως το a^*a είναι αυτοσυζυγές. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a^*a = b - c \quad \text{όπου } b, c \geqslant 0, \; bc = 0\,.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $c = 0$.

Έστω $x = ca^*$. Παρατηρούμε ότι

$$xx^* = ca^*ac = c(b - c)c = -c^3.$$

Επομένως, αφού $\sigma(c) \subseteq \mathbb{R}_+$, έχουμε $\sigma(-x^*x) = \sigma(c^3) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή

$$-xx^* \in \mathcal{A}_+.$$

Όμως, αν γράψουμε $x = u + iv$ όπου τα $u, v \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγή, βρίσκουμε

$$xx^* + x^*x = 2u^2 + 2v^2$$

το οποίο ανήκει στον $\mathcal{A}_+$ (αφού είναι κώνος). Πάλι χρησιμοποιώντας ότι ο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος, συμπεραίνουμε ότι

$$x^*x = -xx^* + (xx^* + x^*x) \in \mathcal{A}_+.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sigma(x^*x) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \sigma(xx^*) \subseteq \mathbb{R}_-.$$

Όμως, σε κάθε άλγεβρα με μονάδα έχουμε $\sigma(kh) \subseteq \sigma(hk) \cup \{0\}$. [3]

Έπεται λοιπόν ότι $\sigma(xx^*) \subseteq \{0\}$. Κατά συνέπεια $\|xx^*\| = 0$ (αφού το xx^* είναι αυτοσυζυγές) οπότε $-c^3 = xx^* = 0$, άρα ($\rho(c) = 0$ και άρα) $c = 0$ αφού το c είναι αυτοσυζυγές. $\square$

[3] Πράγματι, αν $\lambda \notin \sigma(hk)$ και $\lambda \neq 0$, το στοιχείο $y = \lambda^{-1}\mathbf{1} + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}h$ ικανοποιεί $y(\lambda\mathbf{1} - kh) = (\lambda\mathbf{1} - kh)y = \mathbf{1}$, άρα $\lambda \notin \sigma(kh)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} y(\lambda\mathbf{1} - kh) &= \lambda^{-1}\mathbf{1}(\lambda\mathbf{1} - kh) + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}h(\lambda\mathbf{1} - kh) \\ &= (\mathbf{1} - \lambda^{-1}kh) + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}(\lambda h - hkh) \\ &= (\mathbf{1} - \lambda^{-1}kh) + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}(\lambda\mathbf{1} - hk)h \\ &= (\mathbf{1} - \lambda^{-1}kh) + \lambda^{-1}kh = \mathbf{1} \end{aligned}$$

και ομοίως $(\lambda\mathbf{1} - kh)y = \mathbf{1}$.