Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα 1. *$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι αν $b \in \mathcal{B}$ και $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Υποθέτω πρώτα ότι $b = b^*$. Εφόσον $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \mathbb{R}$ και $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Συνεπώς υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) που συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Τότε όμως $p_n(b) \to f(b)$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα, κάθε $p_n(b)$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, κι επειδή είναι κλειστή, το $f(b) = \lim_n p_n(b)$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Όμως $tf(t) = 1$ για κάθε $t \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, άρα $bf(b) = f(b)b = \mathbf{1}$ (ο συναρτησιακός λογισμός διατηρεί γινόμενα). Δείξαμε λοιπόν ότι $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Γενική περίπτωση. Έστω $c \in \mathcal{A}$ ο αντίστροφος του b στην $\mathcal{A}$. Να δείξουμε ότι $c \in \mathcal{B}$. Θεωρώ το b^*b και παρατηρώ ότι είναι αυτοσυζυγές, ότι ανήκει στην $\mathcal{B}$ (διότι η $\mathcal{B}$ είναι *-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$, άρα περιέχει και το b^*), και ότι είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ και ο αντίστροφός του είναι cc^*: Πράγματι, $b^*bcc^* = b^*(bc)c^* = b^*c^* = \mathbf{1}$ και $cc^*b^*b = c(c^*b^*)b = cb = \mathbf{1}$.

Συνεπώς από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $b^*b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, δηλαδή $cc^* \in \mathcal{B}$. Τότε όμως, αφού $c^*b^* = \mathbf{1}$, έχουμε $c = (cc^*)b^*$, άρα $c \in \mathcal{B}$. $\square$