Το φάσμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή

Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Υπενθύμιση: Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζεται ο τελεστής

$$M_f : g \to fg : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)\,.$$

Είναι (καλά ορισμένος) φραγμένος τελεστής και $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Ελέγχεται άμεσα ότι η απεικόνιση

$$f \to M_f :\ L^\infty(X, \mu) \to \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$$

είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή

$$M_{f+g} = M_f + M_g, \quad M_{fg} = M_f M_g,$$

που διατηρεί την ενέλιξη ($M_f^* = M_{\bar{f}}$) και τη μονάδα ($M_{\mathbf{1}} = I$). Συνεπώς, αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, τότε ο M_f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο[1] της άλγεβρας $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

Αν αντίστροφα ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος, είναι αλήθεια ότι ο αντίστροφός του, έστω T, είναι και αυτός πολλαπλασιαστικός τελεστής; Η απάντηση είναι θετική. Πράγματι, παρατήρησε κατ'αρχήν ότι

• *η f είναι μ-σχεδόν παντού διάφορη του μηδενός.*

Γιατί αν υπήρχε $Y \subseteq X$ θετικού μέτρου ώστε $f|_Y = 0$, τότε, θεωρώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση χ ενός υποσυνόλου του Y με πεπερασμένο μη μηδενικό μέτρο, [2] θα είχαμε $\chi \in L^2(X, \mu)$, $\chi \neq 0$ και $M_f \chi = f\chi = 0$, πράγμα που αποκλείεται, αφού ο M_f είναι 1-1.

Επομένως η συνάρτηση $g = 1/f$ ορίζεται μ-σχεδόν παντού και είναι βεβαίως μετρήσιμη. Ισχυρίζομαι ότι

• *η συνάρτηση $g = 1/f$ είναι ουσιωδώς φραγμένη.*

Πράγματι, αφού $M_f T = I$, η σχέση $M_f T h = h$ για κάθε $h \in L^2(X, \mu)$, δηλαδή $f(x)(Th)(x) = h(x)$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$, δίνει $Th = \frac{1}{f}h = gh$ (μ-σ.π.), επομένως $\|gh\|_2 = \|T(h)\|_2 \leqslant \|T\|\,\|h\|_2$ για κάθε $h \in L^2(X, \mu)$, πράγμα που σημαίνει (*Άσκηση!*) ότι η g είναι ουσιωδώς φραγμένη. Συμπέρασμα:

Πρόταση 1. *Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο M_g όπου $g = 1/f$.*

Αντικαθιστώντας την f με τη συνάρτηση $f - \lambda$, συμπεραίνουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός λ ικανοποιεί $\lambda \notin \sigma(M_f)$ αν και μόνον αν η $\frac{1}{f-\lambda}$ ορίζεται (μ-σχεδόν παντού) και είναι ουσιωδώς φραγμένη, δηλαδή υπάρχει σταθερά $C < \infty$ ώστε $\frac{1}{|f-\lambda|} \leqslant C$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή το σύνολο $\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \frac{1}{C}\}$ έχει μέτρο μηδέν. Γράφοντας δ αντί για $\frac{1}{C}$, έχουμε ισοδύναμα

$$\lambda \notin \sigma(M_f) \quad \iff \quad \exists \delta > 0 \,:\, \mu(\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \delta\}) = 0.$$

Επομένως δείξαμε ότι

Πρόταση 2. *Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{x \in X : |f(x) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό το ονομάζεται* ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) *της f.*

[1] Αν $fg = \mathbf{1}$ τότε $M_f M_g = M_g M_f = M_{fg} = M_{\mathbf{1}} = I$.

[2] Εδώ χρειάζεται να υποθέσουμε ότι κάθε μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου περιέχει ένα υποσύνολο με πεπερασμένο θετικό μέτρο. Αυτό ισχύει πάντα π.χ. όταν το μ είναι σ-πεπερασμένο.