Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

Περιεχόμενα

1 Σχέδιο Μαθήματος
2 Εισαγωγικά: Χώροι τελεστών, Γραφήματα και Θεωρία Πληροφορίας
3 Γραμμικοί χώροι
4 Γραμμικοί χώροι με νόρμα, χώροι Hilbert
5 Φραγμένοι τελεστές
- Ο συζυγής τελεστής

6 C* άλγεβρες και αναπαραστάσεις
- Οι άλγεβρες $C(K)$ και $C_0(X)$

7 Παραδείγματα τελεστών
8 Το φάσμα
9 Μεταθετικές άλγεβρες
- Ιδεώδη και μορφισμοί
- Ο μετασχηματισμός Gelfand
- Θεώρημα Gelfand-Naimark I

10 Ο συναρτησιακός λογισμός
11 Ο θετικός κώνος
12 Θετικές γραμμικές μορφές και αναπαραστάσεις
- Η αναπαράσταση GNS

13 Ευθέα αθροίσματα
14 Η καθολική αναπαράσταση
15 Πλήρως θετικές απεικονίσεις
- Πίνακες σε μια C* άλγεβρα
- Πλήρως θετικές απεικονίσεις, Θεώρημα Stinespring

16 Τανυστικά γινόμενα
17 Πλήρως θετικές απεικονίσεις και τανυστικά γινόμενα

Σχέδιο Μαθήματος

Εισαγωγικά

Χώροι τελεστών, Γραφήματα και Θεωρία Πληροφορίας

(σε χώρους πεπερασμένης διάστασης).

Υπενθυμίσεις:

Χώροι Hilbert και Τελεστές

Πίνακες και Τελεστές

Φραγμένοι τελεστές

Ο συζυγής τελεστής

Παραδείγματα τελεστών

C* άλγεβρες και αναπαραστάσεις

Βασικά παραδείγματα C* αλγεβρών:

- $C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \text{συνεχής}\}$

(όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff, π.χ. $K = [0,1]$)

- $B(H) := \{T : H \to H \text{γραμμική και συνεχής}\}$

(όπου H χώρος Hilbert, π.χ. $H = \ell^2$)

Κοινά στοιχεία: πλήρης νόρμα, πολλαπλασιασμός, ενέλιξη και η ιδιότητα $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Αν A είναι C* άλγεβρα, *αναπαράσταση* της A στον χώρο Hilbert H είναι μια απεικόνιση $\pi : A \to B(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (οπότε είναι αυτομάτως (!) συνεχής).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω A μια C* άλγεβρα και $a = a^* \in A$. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, μπορώ να ορίσω στοιχείο $f(a) \in A$, γενικεύοντας το $f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k a^k$ για πολυωνυμική $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k t^k$ όπου $c_k \in \mathbb{C}$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Αν $A = A^* \in B(H)$ (με $\dim H < \infty$), υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ του H που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Επομένως ως προς αυτή τη βάση ο A έχει πίνακα διαγώνιο.

Τι γίνεται όταν $\dim H = \infty$;

Μεταθετικές C*-άλγεβρες

Θεώρημα Gelfand – Naimark I: Κάθε μεταθετική C* άλγεβρα A είναι ισομετρικά ισόμορφη με μια $C(K)$, οπου K κατάλληλος (μοναδικά ορισμένος) συμπαγής χώρος Hausdorff.

Συνέπειες του θεωρήματος είναι ο συναρτησιακός λογισμός καθώς και το φασματικό θεώρημα.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Έστω A μια C* άλγεβρα (όχι αναγκαστικά μεταθετική) και $A_h := \{a \in A : a = a^*\}$.
Γενικεύοντας την έννοια της θετικής συνάρτησης, μπορώ να ορίσω τι σημαίνει «το $a \in A_h$ είναι θετικό στοιχείο». Το σύνολο A_+ των θετικών στοιχείων είναι γνήσιος κυρτός κώνος στον A_h.

Θετικές γραμμικές μορφές και αναπαραστάσεις

Έστω A μια C* άλγεβρα. Μια γραμμική μορφή $\omega : A \to \mathbb{C}$ λέγεται θετική αν $\omega(a) \geq 0$ για κάθε $a \in A_+$.
Παράδειγμα: Αν π είναι αναπαράσταση της A στον χώρο Hilbert H_π και $\xi \in H_\pi$, η

$$\omega_{\pi,\xi}(a) := \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle , \quad a \in A$$

είναι θετική γραμμική μορφή στην A.

Η Αναπαράσταση GNS

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal) Έστω A μια C* άλγεβρα. Κάθε θετική γραμμική μορφή $\omega : A \to \mathbb{C}$ είναι της μορφής $\omega = \omega_{\pi,\xi}$ για κατάλληλη αναπαράσταση (π, H_π, ξ).

Καθαρές καταστάσεις και ανάγωγες αναπαραστάσεις

Έστω A μια C* άλγεβρα.

Κατάσταση (state) στην A είναι μια θετική γραμμική μορφή νόρμας 1.
Μια κατάσταση λέγεται *καθαρή (pure)* αν είναι ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των καταστάσεων της A (δηλ. δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δυο άλλων καταστάσεων).
Μια αναπαράσταση (π, H_π) της A λέγεται *ανάγωγη (irreducible)* αν δεν αφήνει αναλλοίωτο κανέναν κλειστό υπόχωρο του H_π εκτός απ' τους τετριμμένους $\{0\}$ και H_π.
Θεώρημα. Η GNS αναπαράσταση (π, H_π) που αντιστοιχεί σε μια κατάσταση ω είναι ανάγωγη αν και μόνον αν η ω είναι καθαρή κατάσταση.

Χαρακτηρισμός C* αλγεβρών

Θεώρημα (Gelfand – Naimark II). Κάθε C* άλγεβρα (μεταθετική ή όχι) δέχεται μια ισομετρική (άρα 1-1) αναπαράσταση σε κατάλληλο $B(H)$. Δηλαδή, κάθε C* άλγεβρα είναι άλγεβρα τελεστών.

(Ο χώρος Hilbert H δεν είναι μοναδικά ορισμένος.)

Πίνακες σε μια C* άλγεβρα

Έστω A μια C* άλγεβρα. Αφού μπορώ $A \hookrightarrow B(H)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορώ $M_n(A) \hookrightarrow M_n(B(H))$ (όπου $M_n(A)$ οι $n \times n$ πίνακες με στοιχεία απ'την A).
Όμως $M_n(B(H)) \simeq B(H^{(n)})$, όπου $H^{(n)} := H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$.

Έτσι, η $M_n(A)$ γίνεται C* άλγεβρα.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Έστω A μια C* άλγεβρα. Μια $\omega : A \to B(H)$ λέγεται *θετική* αν $a \in A_+ \Rightarrow \omega(a) \in B(H)_+$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζω

$$\omega_n : M_n(A) \to M_n(B(H)) : [a_{ij}] \mapsto [\omega(a_{ij})].$$

Η $\omega : A \to B(H)$ λέγεται *πλήρως θετική (completely positive)* αν κάθε ω_n είναι θετική.
(Οι απεικονίσεις αυτές καθορίζουν τα λεγόμενα «κβαντικά κανάλια» στην Quantum Infotmation Theory.)

Πλήρως θετικές απεικονίσεις: Θεώρημα Stinespring

Παράδειγμα 1. Κάθε αναπαράσταση $\pi : A \to B(H)$ είναι πλήρως θετική.
Παράδειγμα 2. Αν $V : H' \to H$ είναι φραγμένος τελεστής, η απεικόνιση $B(H') \to B(H) : a \mapsto VaV^*$ είναι πλήρως θετική.

Θεώρημα Stinespring: Κάθε πλήρως θετική απεικόνιση $\omega : A \to B(H)$ είναι συνδυασμός των παραπάνω: $\omega(a) = V\pi(a)V^*$ για κατάλληλα (π, H_π) και $V : H_\pi \to H$.

Τανυστικά γινόμενα, σύνθετα συστήματα και Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας

Σύνθετα κβαντικά συστήματα αναπαρίστανται συχνά μέσω τανυστικών γινομένων χώρων Hilbert: $H_A \otimes H_B$.
Ενδιαφέρουν τελεστές σε τέτοια τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert καθώς και θετικές απεικονίσεις μεταξύ των αντίστοιχων χώρων τελεστών.

Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ?

Παράδειγμα 1. $T : f \to a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ οι a_i είναι «καλές» συναρτήσεις).
Πού ορίζεται? Στον χώρο $C_2(\Omega)$.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{C}, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$

Παράδειγμα 3. $T : f \to (Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π-περιοδική)
Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω $Tf_n = \hat{g}(n)f_n$ $(n \in \mathbb{Z})$,

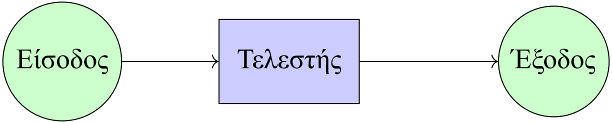
$$\text{δηλαδή } T : \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ldots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \ldots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ο T διαγωνοποιήθηκε! ... Ως προς την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Γιατί; Γιατί είναι ορθοκανονικά. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγουν. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

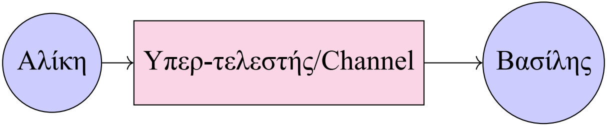
Alice και Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης → Βασίλη]

Γραφήματα - μεταθετικά και μη

Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, \mathcal{E})$ αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο V, τις ακμές (the “vertex set”), και ένα σύνολο $\mathcal{E} \subseteq V \times V$, τις κορυφές (the “edge set”), ώστε
(1) $(v, v) \notin \mathcal{E}$ για κάθε $v \in V$ (no loops), και
(2) αν $v \neq w \in V$ και $(v, w) \in \mathcal{E}$, τότε $(w, v) \in \mathcal{E}$.

Γράφουμε $v \sim_{\mathcal{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathcal{E}$
και $v \simeq_{\mathcal{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathcal{E}$ ή $v = w$.

Ορισμός

Αν $G = (V, \mathcal{E})$ είναι γράφημα, το συμπλήρωμα (complement) του G, που συμβολίζουμε $\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$, ορίζεται από τη σχέση
$(v, w) \in \bar{\mathcal{E}} \iff (w \neq v$ και $(v, w) \notin \mathcal{E})$.

Συστήματα Τελεστών (Operator Systems) στον M_n

Αν $a = [a_{ij}] \in M_n$, ο συζυγής a^* είναι ο πίνακας $a^* = [\bar{a}_{ji}]$. [1]

Ορισμός

Σύστημα τελεστών στον $M_n := M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ένα $\mathcal{S} \subseteq M_n$ με τις ιδιότητες

- είναι γραμμικός υπόχωρος του M_n
- είναι αυτοσυζυγής, δηλ. $a \in \mathcal{S} \Rightarrow a^* \in \mathcal{S}$
- περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $1 \in M_n$.

Κάθε γράφημα $G = (V, \mathcal{E})$ με $|V| = n < \infty$ ορίζει ένα σύστημα τελεστών $\mathcal{S}_G \subseteq M_n$ ως εξής

$$\mathcal{S}_G := \{a = [a_{ij}] \in M_n : a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \simeq_{\mathcal{E}} j\}.$$

Δηλαδή το $\mathcal{S}_G$ αποτελείται από όλους τους πίνακες που «φέρονται» στο $\mathcal{E} \cup \{(i,i) : i \in [n]\}$.

[1] Ευχαριστώ!

Παράδειγμα

Αν $V = [5]$ και
$\mathcal{E} = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}$ τότε το $\mathcal{S}_G$ αποτελείται από όλους τους πίνακες της μορφής

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

όπου στις θέσεις $*$ υπάρχουν (αυθαίρετοι) μιγαδικοί αριθμοί.

Συστήματα Τελεστών (Operator Systems) στον M_n

Το σύστημα $\mathcal{S}_G$ έχει τις επιπλέον ιδιότητες:
Αν $a \in \mathcal{S}_G$ και $b \in D_n$ (:διαγώνιος πίνακας) τότε $ab \in \mathcal{S}_G$ και $ba \in \mathcal{S}_G$.
Συνοπτικά $D_n \mathcal{S}_G D_n \subseteq \mathcal{S}_G$.

Λέμε ότι το $\mathcal{S}_G$ είναι διπρότυπο (bimodule) πάνω στην *-άλγεβρα D_n των διαγωνίων πινάκων.

Το σύνολο D_n είναι σύστημα τελεστών, επιπλέον είναι και άλγεβρα, δηλ. $a, b \in D_n \Rightarrow ab \in D_n$.

Είναι μεταθετική άλγεβρα, και μάλιστα είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa).

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ 'h $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ 'wste

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

- (i) $x + y = y + x$.
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- (iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ ώστε $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.
- (iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- (i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
- (ii) $1x = x$.
- (iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- (iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το $\mathbb{C}$.

- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \ldots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει ((ανάστροφος)) (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

• Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \, \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.
Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x = x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m) e_m$.
Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \ldots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Αν $A \neq \emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g,\ \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

• Παράδειγμα: Αν $A = [n] \times [m]$ (εδώ $[n] := \{1, \ldots, n\}$) τότε $\mathbb{K}^A$ είναι ο χώρος των $M_{nm}(\mathbb{K})$ των $n \times m$ πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{K}$.

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος V μπορεί να αναπαρασταθεί ως χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.
Ειδικότερα αν $\dim V < \infty$ και $E := \{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του, κάθε $v \in V$ γράφεται μοναδικά $v = \sum_{k=1}^{n} v(k)e_k$, οπότε η απεικόνιση $v \mapsto (v(1), \dots, v(n))$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός του V με τον χώρο $\mathbb{K}^{[n]}$.
Γενικότερα, κάθε γραμμικός χώρος V έχει μια αλγεβρική ή "Hamel" βάση, δηλ. ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $E := \{e_i : i \in I\} \subseteq V$ με $\operatorname{span} E = V$.[2] Επομένως κάθε $v \in V$ γράφεται μοναδικά $v = \sum_{i \in I_v} v(i)e_i$ όπου I_v είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I. Τώρα η απεικόνιση $v \mapsto (v(i))_{i \in I}$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός του V με έναν υπόχωρο του $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.

Σχόλιο Η αναπαράσταση αυτή δεν είναι μοναδική, ούτε είναι χρήσιμη σε όλες τις περιπτώσεις. Π.χ. ο $V = C([0,1])$ είναι απ' τον ορισμό του χώρος συναρτήσεων, υπόχωρος του $\mathbb{C}^{[0,1]}$.

---

[2] Αποδεικνύεται με το Λήμμα Zorn

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathcal{L}^1[0,1]$ των Lebesgue-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Lebesgue)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)d\lambda(t) := \int u(t)d\lambda(t) + i\int v(t)d\lambda(t),$$

Ο $\mathcal{L}^1[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες,δηλ. $\sum_n |x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T : E \mapsto F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)\,.$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \mapsto F$.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\| \cdot \|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \| \cdot \|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\; d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \| \cdot \|)$ λέγεται χώρος Banach.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.
Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a, b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \; \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle \, .$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2} .$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση
$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται ημι–εσωτερικό γινόμενο.
Ένα ημι–εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης.

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής:
$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x(k)}y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμμιά φορά και χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space) εξαιτίας του επόμενου ορισμού.

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \to \mathbb{K}^m$, $W : E \to \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \left\langle \tilde{T}_A e_k, f_i \right\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Πίνακες και Τελεστές

Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$.

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) : A \to T_A$ είναι 1-1, επί και γραμμική. Όταν $n = m$, απεικονίζει το γινόμενο πινάκων στη σύνθεση τελεστών (η γενικότερα όταν ορίζεται γινόμενο).

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$. Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle = \langle y, T_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$. Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } \; x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα A_T. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$, $(TR)^* = R^* T^*$, $T^{**} = T$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Δηλαδή κάθε $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = y + z$ με $y \in M$ και $z \in M^{\perp}$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \, : y \to P_M(y)$$

όπου $P_M(y) \in M$ και $y - P_M(y) \in M^\perp$ είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τη σχέση $M \oplus M^\perp = H$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα (αφού $P_M(y) \perp y - P_M(y) \in M^\perp$):

$$\|P_M(y)\|^2 + \|y - P_M(y)\|^2 = \|y\|^2$$
$$\text{άρα} \quad \|P_M(y)\| \le \|y\|$$

οπότε, αν $y_n \to y$ έχουμε
$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \le \|y_n - y\| \to 0.$

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H *χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή* $f : H \to \mathbb{K}$ *υπάρχει μοναδικό* $x_f \in H$ *ώστε*

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; y \in H$$

(και αντίστροφα).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική, (δηλ. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\ \forall i, j$) και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E, δηλ. $\lim_N \|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n\| = 0$).

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη καθέτου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.
Είναι χώρος Banach (δηλ. πλήρης) αν-ν $(F, \|\cdot\|_F)$ Banach.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x-x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \, \|x-x'\|_E$$

Αν T γραμμική,
φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση

$$\tilde{T} : E \to F \quad \textit{δηλ.}\ \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Απόδειξη στο αρχείο extend.pdf

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 *είναι δύο χώροι Hilbert και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \textit{για κάθε } \; x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.
(β) $a^{**} = a$.
(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.
για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathcal{B}(H)$
(όπου $\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ για κάθε $x, y \in H$.

Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$
(όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

C*-άλγεβρες

Ορισμός

Άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ που είναι και άλγεβρα με την ιδιότητα $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.

Ορισμός

C*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Αναπαραστάσεις

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ (όπου H χώρος Hilbert) που είναι μορφισμός *-αλγεβρών, δηλαδή

$$\pi(a+\lambda b) = \pi(a) + \lambda\pi(b)$$
$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$$
$$\pi(a^*) = (\pi(a))^*$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$.

Η αναπαράσταση $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$ λέγεται πιστή (faithful) αν είναι 1-1. Λέγεται μη εκφυλισμένη (non-degenerate) αν $\overline{\mathrm{span}(\pi(\mathcal{A})(H))} = H$.

Οι άλγεβρες $C(K)$ και $C_0(X)$

- K: συμπαγής χώρος Hausdorff (πχ. συμπαγής μετρικός, πχ. $[0,1]$

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \mid \text{συνεχής}\}.$$

Είναι C* άλγεβρα (μεταθετική και με μονάδα) με πράξεις κατά σημείο (ενέλιξη $f^*(t) = \overline{f(t)}$) και νόρμα $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in K\}$.

- X: τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff,

δηλ. κάθε $x \in X$ έχει περιοχή V_x ώστε $\overline{V_x}$ συμπαγής (πχ. $\mathbb{R}^d$).

$$C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid \text{συνεχής και } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$$

όπου $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ σημαίνει
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K_f \subseteq X$ συμπαγές ώστε $|f(x)| < \varepsilon \; \forall x \notin K_f$.
Είναι C* άλγεβρα (μεταθετική χωρίς μονάδα, εκτός αν X συμπαγής) με πράξεις κατά σημείο και νόρμα $\|f\|_\infty$.

Οι άλγεβρες $C_c(X)$ και $C_b(X)$

$$C_c(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid \text{συνεχής με συμπαγή φορέα}\}$$

δηλαδή $\exists K_f \subseteq X$ συμπαγές ώστε $f(x) = 0\ \forall x \notin K_f$.
Είναι πυκνή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C_0(X)$ (μάλιστα ιδεώδες).
Μάλιστα, η $C_0(X)$ έχει μια προσεγγιστική μονάδα [3] που περιέχεται στο $C_c(X)$.

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid \text{συνεχής και φραγμένη}\}.$$

Είναι C* άλγεβρα (μεταθετική με μονάδα) με πράξεις κατά σημείο και νόρμα $\|f\|_\infty$.

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X)$$

[3] Δες στο approxu.pdf.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i\rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i\rangle = \sum_k a_{ik} x(k).$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Για κάθε

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

ορίζω U:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί.
Ο συζυγής U^*:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

$$U^*x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Ισοδύναμα:

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και } S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$).
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Υπενθύμιση. Ο χώρος $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $\|f\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dm(t) < \infty$. Ο χώρος $L^2(\mathbb{R})$ αποτελείται από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας στοιχείων του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ modulo ισότητα σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο Lebesgue m). Η $\|f\|^2$ επάγει νόρμα στον $L^2(\mathbb{R})$ που είναι χώρος Hilbert με το $\langle f, g\rangle := \int f\bar{g}dm$.
Ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$: για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g \in C_c(R)$ ώστε $\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^2 dm(t) < \varepsilon^2$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα ισότητα).

• Η απεικόνιση $f \to M_f : C([a,b]) \to \mathcal{B}(L^2([a,b]))$ αποτελεί μια 1-1 αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C([a,b])$ στον χώρο Hilbert $L^2([a,b])$.

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$

Αν $(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$ αν (α) είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη και
(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded),
δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \le M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.
Δηλ. ορίζουμε
$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0\}$.
Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$, τότε
$\|f\|_\infty = 0$ αν-ν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.
Ο $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$, που γίνεται C* άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο (μ-σχεδόν παντού).

Παρένθεση: Ο χώρος $\ell^2(\Gamma)$

Αν Γ τυχόν με κενό σύνολο (πχ. $\Gamma = [0,1]$) και $x : \Gamma \to \mathbb{C}$ θέτουμε

$$\|x\|_2^2 = \sup\{\sum_{t\in F} |x(t)|^2 : F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. } \} \in [0, +\infty]$$

και ορίζουμε

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{C} : \|x\|_2 < +\infty\}.$$

Ο $(\ell^2(\Gamma), \|\cdot\|_2)$ γίνεται χώρος Hilbert με ο.κ. βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ [4] και ο $c_{00}(\Gamma) := \text{span}\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ είναι πυκνός υπόχωρος.
Κάθε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, όπως για το $\mathbb{N}$.

Η απεικόνιση $\ell^\infty(\Gamma) \to \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma)) : a \to D_a$ είναι πιστή αναπαράσταση της C* άλγεβρας $\ell^\infty(\Gamma)$,

[4] όπου $\delta_t : \Gamma \to \mathbb{C}$ ορίζεται από $\delta_t(s) = 1$ αν $s = t$ και $\delta_t(s) = 0$ αλλιώς.

Αναπαραστάσεις της $C([0,1])$: Παραδείγματα

- π_1 στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$ όπου $\Gamma = [0,1]$. Ορίζουμε $\pi_1(f) \in \mathcal{B}(\ell^2([0,1]))$ από τη σχέση $\pi_1(f) = D_f$ δηλ. $(\pi_1(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in \ell^2([0,1])$ και $t \in [0,1]$.

- π_2 στον $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$: ίδιος τύπος $\pi_2(f) = D_f$, αλλά ο $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$ είναι διαχωρίσιμος.

- π_μ στον $L^2([0,1],\mu)$. Ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2([0,1],\mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0,1],\mu))$ και (μ-σχεδόν) κάθε $t \in [0,1]$.

Οι π_1 και π_2 είναι πιστές αναπαραστάσεις. Για την π_μ, εξαρτάται από τον φορέα του μέτρου. Π.χ. αν το μέτρο μ μηδενίζεται στο $[\frac{1}{2},1]$, κάθε $f \in C([0,1])$ που φέρεται στο $[\frac{1}{2},1]$ θα ικανοποιεί $\pi_\mu(f) = 0$ (Εξηγείστε γιατί).

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in B_1(H_1), y \in B_2(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ (πεπερ.) και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός. Κάθε M_f είναι φυσιολογικός. Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.
Υπενθύμιση Αν $f \in L^2([0, 2\pi]$, θέτουμε
$(Ff)(n) = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα.
(i) Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται φυσιολογικό (normal) αν $a^*a = aa^*$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$)
(ii) Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται αυτοσυζυγές (self-adjoint) αν $a = a^*$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{R}$)
(iii) Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, ένα $u \in \mathcal{A}$ λέγεται ορθομοναδιαίο (unitary) αν $u^*u = \mathbf{1}$ και $uu^* = \mathbf{1}$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{T}$)

Το φάσμα ενός $x \in \mathcal{A}$

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathcal{A}$ λέγεται αντιστρέψιμο (invertible) αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{A}$ με $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.
Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T, ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το φάσμα (spectrum) $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$ λέγεται επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent) του x.

Αν $(\lambda I - T)\xi = \eta$, τότε $\xi = (\lambda I - T)^{-1}\eta = R_\lambda(T)\eta$.

Παράδειγμα: το φάσμα του $M_f \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$

Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν-ν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο M_g όπου $g = 1/f$.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό ονομάζεται ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) της f.

Αποδείξεις: στο αρχείο spmf.pdf

Άσκηση Αν $(X, \mu) = ([0,1], m)$ και $f \in C([0,1])$, τότε $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0,1])$.

Η ομάδα $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathcal{A}$

Πρόταση

Αν $a \in \mathcal{A}$ *και* $\|a\| < 1$*, τότε η* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *συγκλίνει στην* $\mathcal{A}$ *και ισούται με* $(\mathbf{1} - a)^{-1}$*. Συνεπώς* $\mathbf{1} - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$*.*

Πρόταση

Η μονάδα $\mathbf{1}$ *είναι εσωτερικό σημείο του* $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$*.*

Πρόταση

Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ *είναι ανοικτό στην* $\mathcal{A}$*.*

Πρόταση

Η απεικόνιση $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) : x \to x^{-1}$ *είναι συνεχής (άρα ομοιομορφισμός).*

Το φάσμα είναι μη κενό συμπαγές

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα [5] και $x \in \mathcal{A}$. Το φάσμα (spectrum) $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$ λέγεται επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent) του x.

Υπενθύμιση Αν $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, το φάσμα κάθε $a \in M_n(\mathbb{C})$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών της, δηλ. των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Το $\sigma(a)$ είναι μη κενό, γιατί κάθε (μη σταθερό) μιγαδικό πολυώνυμο έχει ρίζα (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, πόρισμα του Θεωρ. Liouville).

[5] για άλγεβρες χωρίς μονάδα, δείτε αργότερα στο (54).

Το φάσμα είναι μη κενό συμπαγές

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Τότε:

Πρόταση

Το σύνολο $\sigma(x)$ είναι κλειστό.

Πρόταση

Το σύνολο $\sigma(x)$ είναι φραγμένο, μάλιστα $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$.

Θεώρημα

Το σύνολο $\sigma(x)$ δεν είναι κενό.

Το φάσμα είναι μη κενό συμπαγές

Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η επιλύουσα συνάρτηση

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(x) \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη (:έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$).

Για τις αποδείξεις, δες το αρχείο spban2.pdf.

Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν $\mathcal{A}$ είναι C-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.*

Αποδείξεις στο αρχείο gelbe2.pdf.

Θεώρημα Gelfand-Mazur

Θεώρημα (Gelfand-Mazur)

Κάθε μιγαδική διαιρετική άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$ μέσω της απεικόνισης

$$\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{A} : \lambda \mapsto \lambda \mathbf{1}\,.$$

Παρατήρηση Η μεταθετικότητα της άλγεβρας δεν προϋποτίθεται, αλλά είναι ένα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Ορισμός

Μορφισμός $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (όπου $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ άλγεβρες) είναι μια γραμμική και πολλαπλασιαστική απεικόνιση.
Χαρακτήρας ή πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή ω σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας *μη μηδενικός* μορφισμός $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\Omega(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.

Πρόταση

Κάθε χαρακτήρας μιας άλγεβρας Banach (μεταθετικής ή όχι) είναι συνεχής, με νόρμα το πολύ 1. Αν μάλιστα η άλγεβρα έχει μονάδα, τότε κάθε χαρακτήρας έχει νόρμα ακριβώς 1.

Αποδείξεις στο αρχείο metath.pdf.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα και $\mathcal{J}$ ιδεώδες της $\mathcal{A}$, το πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ γίνεται άλγεβρα με τις πράξεις

$$\begin{aligned}
(x+\mathcal{J})+(y+\mathcal{J}) &= (x+y)+\mathcal{J} \\
\lambda(x+\mathcal{J}) &= (\lambda x)+\mathcal{J} \\
(x+\mathcal{J}).(y+\mathcal{J}) &= (x.y)+\mathcal{J}
\end{aligned}$$

και η κανονική απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J} : x \to x+\mathcal{J}$$

είναι μορφισμός με πυρήνα $\ker \pi = \mathcal{J}$. Κάθε ιδεώδες είναι αυτής της μορφής.

Παρατήρηση Ένα ιδεώδες μιάς άλγεβρας με μονάδα είναι γνήσιο αν και μόνον αν δεν περιέχει την μονάδα, ισοδύναμα αν δεν περιέχει κανένα αντιστρέψιμο στοιχείο.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα και υπάρχει $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ μορφισμός $\neq 0$, ο πυρήνας $\ker\omega$ είναι μεγιστικό ιδεώδες.
Στόχος: Το αντίστροφο όταν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα.

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{J}$ ένα (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) γνήσιο *ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε η κλειστή θήκη $\overline{\mathcal{J}}$ του $\mathcal{J}$ είναι* γνήσιο *(ομοειδές) ιδεώδες.*
Άρα, κάθε μεγιστικό (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) ιδεώδες μίας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι κλειστό.

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}$ *είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και* $\mathcal{J}$ *ένα αμφίπλευρο* κλειστό *ιδεώδες της* $\mathcal{A}$*, τότε ο χώρος πηλίκο* $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ *εφοδιασμένος με την νόρμα πηλίκο*

$$\|a+\mathcal{J}\|_q \equiv \inf\{\|a+x\| : x \in \mathcal{J}\} = d(a,\mathcal{J})$$

είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, και η κανονική απεικόνιση πηλίκο $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ *είναι συνεχής (επι-)μορφισμός.*

Ιδεώδη και μορφισμοί

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Η απεικόνιση

$$\omega \to \ker \omega$$

είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των χαρακτήρων και του συνόλου των μεγιστικών ιδεωδών της $\mathcal{A}$.

Πόρισμα

Το σύνολο $\Omega(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων κάθε μεταθετικής άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα δεν είναι κενό.

Σε μη μεταθετικές άλγεβρες:

Παράδειγμα $\Omega(M_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ για $n \geq 2$.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ *μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και* $x \in \mathcal{A}$.
(a) Το x *είναι αντιστρέψιμο στην* $\mathcal{A}$ *ανν* $\omega(x) \neq 0$ *για κάθε* $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$, *ισοδύναμα αν το* x *δεν περιέχεται σε κανένα (μεγιστικό) ιδεώδες της* $\mathcal{A}$.
(b) $\sigma(x) = \{\omega(x) : \omega \in \Omega(\mathcal{A})\}$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας συμπαγής Hausdorff χώρος K και ένας συνεχής μορφισμός αλγεβρών $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(K)$ ο οποίος μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις, είναι 1-1. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη, ως άλγεβρα, με μία άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων στον K.

Υπενθύμιση

Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής-* (w^*) τοπολογία του τοπολογικού δυικού X^* είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του X: Αν (ω_i) είναι δίκτυο στον X^*,

$$\omega_i \xrightarrow{w^*} \omega \iff \omega_i(x) \to \omega(x) \quad \forall x \in X .$$

Η w^* είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του $\mathbb{C}^X$ στον X^*.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $\Omega(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή- τοπολογία.*

Χωρίς μονάδα: Αν $\dim \mathcal{A} < \infty$, τότε $\Omega(\mathcal{A})$ συμπαγής.
Όμως, $\Omega(c_o)$ μη συμπαγής (άσκηση).

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε

$$\hat{x} : \Omega(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \omega \to \omega(x).$$

Η απεικόνιση $\mathcal{G} : x \to \hat{x}$ λέγεται μετασχηματισμός Gelfand.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\hat{x} : \Omega(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \omega \to \omega(x).$$

Θεώρημα (Gelfand)

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G} : x \to \hat{x} : \mathcal{A} \to C(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$$

(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.
(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\Omega(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ *για κάθε* $x \in \mathcal{A}$.
(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|.$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.
(δ) $\ker(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{A} : \rho(x) = 0\}$.

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Το ριζικό (Radical) του Jacobson $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$ είναι η τομή όλων των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών της. Αν $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, η $\mathcal{A}$ λέγεται ημιαπλή.

Αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) &= \bigcap\{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{M} \text{ μεγιστικό ιδεώδες}\} \\
&= \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) = 0 \ \forall \omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\
&= \{x \in \mathcal{A} : \rho(x) = 0\} \\
&= \ker(\mathcal{G}).
\end{aligned}$$

Παραδείγματα: Η άλγεβρα $C(K)$

Αν K είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff και $t \in K$, το σύνολο

$$\mathcal{M}_t = \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$$

είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$.
Κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$ είναι αυτής της μορφής.
Ο χώρος των χαρακτήρων της $C(K)$ είναι ομοιομορφικός με το K.
Η απεικόνιση Gelfand «είναι» η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι ισομετρία και επί.

Λεπτομέρειες στο αρχείο metathex.pdf.

Παράδειγμα: Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k| := \|a\|_1 < \infty\}$$

Επεκτείνουμε την πράξη της (μεταθετικής) ομάδας $\mathbb{Z}$ στον πυκνό υπόχωρο c_{00} θέτοντας $e_k * e_m = e_{k+m}$, δηλαδή

$$a * b = \sum_k \sum_m a_k b_m e_{k+m} = \sum_n \sum_k a_k b_{n-k} e_n \,.$$

Η σχέση $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ δείχνει ότι η πράξη $(a, b) \mapsto a * b$ επεκτείνεται σε πράξη στον $\ell^1(\mathbb{Z})$ που γίνεται (μεταθετική) άλγεβρα Banach με μονάδα e_0.

Λεπτομέρειες στο αρχείο metathex.pdf.

Παράδειγμα: Η άλγεβρα Fourier ή άλγεβρα Wiener $\mathcal{W}$

Πρόκειται για το σύνολο $\mathcal{W}$ των συναρτήσεων f της μορφής

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{ikt} \ \ (e^{it} \in \mathbb{T}) \ \text{ όπου } \sum_k |a_k| < \infty\,,$$

με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα $\|f\|_W := \sum_k |a_k|$.

Ο χώρος $\Omega(\mathcal{W})$ των χαρακτήρων είναι ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ μέσω της $\omega : \mathbb{T} \to \Omega(\mathcal{W}) : e^{it} \to \delta_{e^{it}}$ όπου $\delta_{e^{it}}(f) = f(e^{it})$, $f \in \mathcal{W}$.

Η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί. Έχει πυκνή εικόνα, άρα όχι κλειστή, και (επομένως) η αντίστροφη απεικόνιση δεν είναι συνεχής.

Θεώρημα (Wiener)

Αν μια $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και δεν μηδενίζεται πουθενά στον $\mathbb{T}$, τότε η $1/f$ έχει και αυτή απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier. Δηλαδή:

Αν $f \in \mathcal{W}$ και $f(e^{it}) \neq 0$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τότε $1/f \in \mathcal{W}$.

Παράδειγμα: Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ (συνέχεια)

Η άλγεβρα Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ είναι ισόμορφη ως άλγεβρα με την $\mathcal{W}$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \ell^1(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$.
(όπου $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.)
Επομένως ο χώρος $\Omega(\ell^1)$ των χαρακτήρων της είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{T}$.
Συγκεκριμένα η απεικόνιση $\Psi : \mathbb{T} \to \Omega(\ell^1) : z \to \psi_z$ όπου $\psi_z(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι ομοιομορφισμός.
Πράγματι, είναι σύνθεση των ομοιομορφισμών

$$\mathbb{T} \to \Omega(\mathcal{W}) \to \Omega(\ell^1) : z \mapsto \delta_z \mapsto \delta_z \circ \mathcal{F}^{-1} = \psi_z$$

Παράδειγμα: Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$

Αν «ταυτίσουμε» τους χώρους αυτούς, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand «ταυτίζεται» με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή για κάθε $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$,

$$(\mathcal{G}(a))(\psi_{e^{i\theta}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} = (\mathcal{F}^{-1}(a))(\theta)$$

$$\text{ή} \qquad \mathcal{G}(a) = \mathcal{F}^{-1}(a)\,.$$

Ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1, και έχει πυκνή εικόνα, αλλά δεν είναι επί της $C(\Omega(\ell^1))$.

Λεπτομέρειες στο αρχείο metathex.pdf.

Θεώρημα Gelfand-Naimark

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Κάθε μεταθετική C-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την* $C(\Omega(\mathcal{A}))$ *όπου* $\Omega(\mathcal{A})$ *είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$*: Ο μετασχηματισμός Gelfand:*

$$\mathcal{A} \to C(\Omega(\mathcal{A})) : \ a \to \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\omega) = \omega(a)$, $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$*) είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της* $\mathcal{A}$ επί *της* $C(\Omega(\mathcal{A}))$.

Απόδειξη $\|\hat{a}\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|$. Άρα είναι ισομετρία. Επίσης, για κάθε $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$ έχουμε $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αποδ;), άρα $(\hat{a})^* = \widehat{a^*}$. Άρα ο $\mathcal{G}$ είναι επί απο το Θεώρημα Stone – Weierstrass.

Λεπτομέρειες στο αρχείο metath3.pdf.

Παράρτημα: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathcal{B} \subseteq C(K)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $1 \in \mathcal{B}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του K (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{B}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{B}$).

Τότε η $\mathcal{B}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.

Εφαρμογή. $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, $\mathcal{B} := \{p(z, \bar{z}) : p(\cdot, \cdot) \text{ πολυώνυμο}\}$.

C^*-άλγεβρες χωρίς μονάδα

Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα 1 τότε αναγκαστικά $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ και $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα χωρίς μονάδα. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\sim &:= \mathcal{A} \oplus \mathbb{C} \\ (a,z)(b,w) &:= (ab + wa + zb, zw) \\ (a,z)^* &:= (a^*, \bar{z}) \\ \|(a,z)\| &:= \sup\{\|ab + zb\| : b \in ball(\mathcal{A})\} \end{aligned}$$

Δηλαδή η νόρμα στην $\mathcal{A}^\sim$ ορίζεται ταυτίζοντας κάθε $(a,z) \in \mathcal{A}^\sim$ με τον τελεστή $L_a + zI : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : b \to ab + zb$ στον χώρο Banach $\mathcal{A}$.

Πρόταση

Η $\mathcal{A}^\sim$ με τις πράξεις και τη νόρμα που ορίσαμε είναι C^*-άλγεβρα.

Μεταθετικές C^*-άλγεβρες χωρίς μονάδα

Θεώρημα

*Αν $\mathcal{A}$ μεταθετική C^*-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $C_o(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$. Η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\Omega(\mathcal{A})$ είναι w^*-συμπαγής.*

Αποδείξεις στο αρχείο unitze.pdf.

Παρατήρηση Αν $\mathcal{A}$ είναι C^*-άλγεβρα χωρίς μονάδα, το φάσμα κάθε $a \in \mathcal{A}$ είναι εξ ορισμού το φάσμα του a (ακριβέστερα, του στοιχείου $(a,0)$) στη μοναδοποίηση $\mathcal{A}^{\sim}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda\mathbf{1} \notin \mathrm{Inv}\mathcal{A}^{\sim}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (a, -\lambda) \notin \mathrm{Inv}\mathcal{A}^{\sim}\}.\end{aligned}$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν p πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_n A^n$.

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$,

Πρτρ. Η απεικόνιση $\omega_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί τις πράξεις $+$ και $\cdot$.

Πρόταση (Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης)

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p,

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}.$$

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

*Αν $a = a^* \in \mathcal{A}$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\omega_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επομένως ισχύει $\omega_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Ορισμός

Έστω $a = a^* \in \mathcal{A}$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$. Γράφουμε $f(a)$ αντί για $\omega_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(a)$, το στοιχείο $f(a)$ της $\mathcal{A}$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(a) = \lim p_n(a) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(a)} \to 0.$$

Αποδείξεις στο αρχείο funcalc1.pdf.

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Αποδείξεις στο αρχείο spdep.pdf.

Συνέχεια μορφισμών

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C* άλγεβρες με μονάδα και $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας *-μορφισμός με $\omega(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$. Τότε

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|\omega(a)\| \leq \|a\|$. Αν η ω είναι 1-1, τότε είναι ισομετρία.

Πόρισμα

*Αν $\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι 1-1 *-μορφισμός μεταξύ C* αλγεβρών, τότε η $\omega(\mathcal{A})$ είναι C* υπάλγεβρα της $\mathcal{B}$.*

Σε μια C* άλγεβρα, η νόρμα καθορίζεται από την αλγεβρική δομή:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup \sigma(a^*a).$$

Πρόταση (Μοναδικότητα της νόρμας)

Αν $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι C άλγεβρα και $\|\cdot\|'$ μια νόρμα στην $\mathcal{A}$ με $\|ab\|' \leq \|a\|' \|b\|'$ και $\|a^*a\|' = \|a\|'^2$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$, τότε $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$.*

Αποδείξεις στο αρχείο morph.pdf.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός)

*Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Υπάρχει *-μορφισμός*

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$$

με $\omega_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\omega_c(\mathrm{id}) = a$ αν και μόνον αν $a^*a = aa^*$. Η επέκταση αυτή (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το πεδίο τιμών της είναι ακριβώς η C^*-υπάλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$.
Αν $f \in C(\sigma(a))$, γράφουμε συνήθως $f(a)$ αντί για $\omega_c(f)$.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα.

Λήμμα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$ με $a^*a = aa^*$. Αν $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι η C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$, τότε ο χώρος $\Omega(\mathcal{C})$ των χαρακτήρων της $\mathcal{C}$ είναι ομοιομορφικός με το φάσμα $\sigma(a)$ του a.

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Το σύνολο*

$$C^*(\mathbf{1}, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων των a και a^*.*

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ *μια* C^* *άλγεβρα με μονάδα* $a \in \mathcal{A}$ *φυσιολογικό. Για κάθε* $f \in C(\sigma(a))$ *ισχύει*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{A}$ *μια* C^* *άλγεβρα χωρίς μονάδα* $a \in \mathcal{A}$ *φυσιολογικό. Για κάθε* $f \in C(\sigma(a))$*, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το* $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$*. Το* $f(a)$ *ανήκει στην* $\mathcal{A}$ *(ακριβέστερα, στην εικόνα της* $\mathcal{A}$ *μέσα στην* $\mathcal{A}^\sim$*) αν-ν η συνάρτηση* f *μηδενίζεται στο* $0 \in \sigma(a)$.

Αποδείξεις στο αρχείο funcalc2.pdf.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται θετικό (γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$.
Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παραδείγματα

• Στον $C_0(X)$: $f \geq 0$ αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in X$
• Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ αν-ν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα αν-ν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
• Στην $\mathcal{B}(H)$: $T \geq 0$ αν-ν $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}$ μια C άλγεβρα, $a = a^* \in \mathcal{A}$ και $f \in C(\sigma(a))$, τότε*

$$f(a) \geq 0 \iff f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Θέτουμε $\mathcal{A}_{sa} := \{a \in \mathcal{A} : a = a^*\}$. Είναι κλειστός πραγματικός υπόχωρος του χώρου $\mathcal{A}$.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος στον $\mathcal{A}_{sa}$:

$$a, b \in \mathcal{A}_+,\ \lambda \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Λήμμα

Έστω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα. Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu\mathbf{1} \leq x \leq \mu\mathbf{1}$.

$$\textit{Επίσης} \quad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu\mathbf{1}\| \leq \mu\,.$$

Πόρισμα

$$\mathcal{A}_+ = \{x \in \mathcal{A}_{sa} : \|\|x\|\mathbf{1} - x\| \leq \|x\|\}\,.$$

Πρόταση

Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή

$$\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα στην $\mathcal{A}$. Μάλιστα*

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } \; a = b^2.$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C άλγεβρας $\mathcal{A}$ γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathcal{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$. Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.*

Θεώρημα

Σε μια C άλγεβρα $\mathcal{A}$, ένα στοιχείο είναι θετικό αν-ν είναι της μορφής a^*a.*

Αποδείξεις στο αρχείο poscone.pdf.

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται θετική αν $\omega(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Λέγεται κατάσταση (state) αν $\|\omega\| = 1$. Λέγεται πιστή (faithful) αν $\omega(a^*a) > 0$ για κάθε $a \neq 0$.

Παραδείγματα

1. Στην $\mathcal{B}(H)$, (i) η $\omega(T) = \langle T\xi, \xi \rangle := \omega_\xi(T)$ (με $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$)
2. (ii) η $\psi(T) = \sum_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle = \sum_i p_i \omega_{\xi_i'}(T)$ όπου $\sum \|\xi_i\|^2 = 1$, $\xi_i' = \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}$ και (p_i) κατανομή πιθανότητας.
3. Στην $C(K)$, (i) η $\omega(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
4. (ii) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Αν ω είναι θετική γραμμική μορφή τότε $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.
Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \langle a, b \rangle = \omega(b^* a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο,[6] και είναι εσωτερικό γινόμενο ανν η ω είναι πιστή.
Ισχύει η ανισότητα

$$|\omega(b^* a)|^2 \leq \omega(a^* a)\omega(b^* b) \ \text{για κάθε} \ a, b \in \mathcal{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathcal{A}$ τότε

$$\omega(a^* a) = 0 \iff \omega(b^* a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Επομένως το σύνολο

$$\mathcal{N}_\omega = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a^* a) = 0\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος της $\mathcal{A}$.

---

[6] δηλ. sesquilinear, ερμιτιανή ($\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$) και θετικά ημιορισμένη ($\langle a, a \rangle \geq 0$)

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή ω σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι συνεχής. Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και η ω είναι θετική, $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$.

Πρόταση

Αν μια γραμμική μορφή ω σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα ικανοποιεί $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$, τότε είναι θετική.

Παρατήρηση Το σύνολο των θετικών γρ. μορφών είναι κώνος. Το σύνολο $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων είναι κυρτό ασθενώς *-συμπαγές υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του δυικού (και περιέχει τους χαρακτήρες).

Αναπαραστάσεις

Στόχος Να δείξουμε ότι κάθε C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ «αναπαρίσταται» ως άλγεβρα τελεστών σε κάποιον χώρο Hilbert.

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert, που είναι μορφισμός *-αλγεβρών, δηλαδή

$$\begin{aligned} \pi(a+\lambda b) &= \pi(a) + \lambda\pi(b) \\ \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \pi(a^*) &= (\pi(a))^* \end{aligned}$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$.

Η αναπαράσταση $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$ λέγεται πιστή (faithful) αν είναι 1-1. Λέγεται μη εκφυλισμένη (non-degenerate) αν

$$\overline{\text{span}(\pi(\mathcal{A})(H))} = H.$$

Η αναπαράσταση GNS (Gelfand-Naimark-Segal)

Έστω $\mathcal{A}$ *-άλγεβρα, H χώρος Hilbert, $\xi \in H$ και $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *-αναπαράσταση. Τότε η

$$\omega_\xi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : a \to \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_H$$

είναι θετική γραμμική μορφή, δηλαδή $\omega(a^*a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Πάμε προς το αντίστροφο: Από την ω να φτιάξουμε (π, H, ξ).

Η αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Έστω (π, H, ξ) και (π', H', ξ') *-αναπαραστάσεις μιας *-άλγεβρας $\mathcal{A}$, όπου ξ κυκλικό διάνυσμα για την (π, H) (δηλαδή $\{\pi(a)\xi : a \in \mathcal{A}\}$ πυκνός στον H) και ξ' κυκλικό για την (π', H').
Αν $\omega_\xi = \omega_{\xi'}$ τότε οι αναπαραστάσεις είναι unitarily ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχει $U : H \to H'$ unitary ώστε $U\xi = \xi'$ και για κάθε $a \in \mathcal{A}$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, tail, two heads, "U"] \arrow[d, "\pi(a)"'] & H' \arrow[d, "\pi'(a)"] \\ H \arrow[r, tail, two heads, "U"'] & H' \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό: $U\pi(a) = \pi'(a)U$.

Η Αναπαράσταση GNS

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ω σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα υπάρχει $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$ όπου π_ω είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ω και $\xi_\omega \in H_\omega$ ένα κυκλικό [7] *μοναδιαίο διάνυσμα ώστε*

$$\omega(a) = \langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathcal{A}.$$

Η τριάδα GNS $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

[7] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$ να είναι πυκνό στον H_ω.

Βήματα απόδειξης GNS

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a,b\rangle_0 := \omega(b^*a)$.
3. Αφού ω θετική, $\langle a,a\rangle_0 = \omega(a^*a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \ : \langle u,u\rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\omega} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ω $(= L^2(\mathcal{A},\omega))$ την πλήρωση του $H_{0\omega}$ ως προς την $\|[a]\|_\omega := \sqrt{\langle a,a\rangle_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον γραμ. χώρο $\mathcal{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\omega} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.

7. Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\omega \leq \|a\| \, \|[b]\|_\omega$.
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\omega(a)$ στον H_ω.

   Εύκολο: η $\pi_\omega : a \to \pi_\omega(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\omega)$ είναι *-αναπαράσταση.

8. Θέτουμε $\xi_\omega = [\mathbf{1}_\mathcal{A}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle_{H_\omega} &= \langle \pi_\omega(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}] \rangle_{H_\omega} \\ &= \langle a, \mathbf{1} \rangle_{H_\omega} = \omega(\mathbf{1}^* a) = \omega(a) \,. \qquad \square\end{aligned}$$

Λεπτομέρειες στο gns20.pdf.

Απόδειξη Stinespring: (144)

Η αναπαράσταση GNS για C*-άλγεβρα χωρίς μονάδα

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C-άλγεβρα και $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ θετική γραμμική μορφή. Τότε υπάρχουν (π, H, ξ) όπου H χώρος Hilbert, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ και $\xi \in H$ κυκλικό διάνυσμα για την π ώστε*

$$\omega(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}\,.$$

Απόδειξη (Όταν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα:) Η ω επεκτείνεται σε θετική[8] γραμμική μορφή στη μοναδοποίηση $\omega_1 : \mathcal{A}^{\sim} \to \mathbb{C}$, οπότε ορίζεται η αναπαράσταση GNS (π_1, H_1, ξ) για το ζεύγος $(\mathcal{A}^{\sim}, \omega_1)$. Ονομάζουμε $H = \overline{\{\pi_1(a)\xi : a \in \mathcal{A}\}} \subseteq H_1$ και $\pi(a) := \pi_1(a)|_H$.
(Παρατήρηση: Εδώ $\xi = [\mathbf{1}_{\mathcal{A}^{\sim}}]$ και συνεπώς $\pi_1(a)\xi \in H$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.)

---

[8] Άσκηση!

Στις C*-άλγεβρες, οι καταστάσεις επαρκούν για τη νόρμα

Παρατήρηση Σε μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathcal{C} \simeq C_0(X)$, για κάθε $a \in \mathcal{C}$ υπάρχει χαρακτήρας $\omega = \delta_t$ ώστε $\|a\| = \sup|\hat{a}| = |\hat{a}(t)| = |\omega(a)|$.
Μια μη μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ μπορεί να μην έχει χαρακτήρες (π.χ. $\mathcal{A} = M_2$). Όμως πάντα υπάρχουν «αρκετές» καταστάσεις:

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A} \backslash \{0\}$ υπάρχει κατάσταση $\omega = \omega_a$ ώστε $\omega(a^*a) = \|a^*a\|$. Συνεπώς $\|\pi_\omega(a)\| = \|a\|$.

Απόδειξη [9] Αρκεί να υποθέσω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα (αλλιώς, δουλεύω στην $\mathcal{A}^\sim$).
Αν $b := a^*a$ και $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\omega : C^*(\mathbf{1}, b) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \omega(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b)))$$

και επεκτείνω (H-B) το ω σε $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ κατάσταση, οπότε $\omega(a^*a) = \omega(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$.

---

[9] Δείτε και το dirsum20.pdf

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$.

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(x_1) \\ T_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert (Hilbert space direct sum) $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\xi = (\xi_i)$ με $\xi_i \in H_i$ για κάθε $i \in I$ και

$$\|\xi\|_H := \sup\left\{ \sum_{i \in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{πεπερασμένο} \right\} < \infty .$$

Άσκηση Είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i \in J_\xi} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το *αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H.

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i)\,.$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\operatorname{supp}(T_i x_i) \subseteq \operatorname{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H.

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) *με* $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ *ορίζει φραγμένο τελεστή* $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ *που επεκτείνει τον* T_0 *αν και μόνον αν* $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. *Μάλιστα*

$$\left\|\bigoplus_i T_i\right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}\,.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων [10]

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i\in I}\pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a)x_i)\,.$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.
Η π είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

[10] Δείτε και το dirsum20.pdf

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των states της $\mathcal{A}$.
Για κάθε $\omega \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$.

Ορισμός

Η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ είναι η (π_u, H_u) όπου

$$H_u := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}} H_\omega \quad \text{και} \quad \pi_u(a) := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}} \pi_\omega(a), \;\; a \in \mathcal{A}.$$

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.
Επομένως κάθε C-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως πιστή C*-υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert H.*

Απόδειξη Για κάθε $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ έχουμε δείξει (Πρόταση (84)) ότι υπάρχει κατάσταση $\omega = \omega_a$ ώστε $\|\pi_\omega(a)\| = \|a\|$. Συνεπώς $\|\pi_u(a)\| \geq \|\pi_\omega(a)\| = \|a\|$ και έχουμε ισότητα.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ *πυκνό υποσύνολο της* $\mathcal{A}$*, για κάθε* $i \in I$ *έστω* π_i *αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$ *ώστε* $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$*. Τότε η αναπαράσταση*

$$\pi := \oplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\omega, \|\cdot\|_\omega)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η $\mathcal{A}$ *είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.*

Υπενθύμιση: Πίνακες και νόρμες

Ο χώρος $M_n := M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων $[a_{ij}]$ με στοιχεία $a_{ij} \in \mathbb{C}$ γίνεται *-άλγεβρα με τις γνωστές πράξεις: γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη, γινόμενο $[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}]$ όπου $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ και ενέλιξη $[a_{ij}]^* = [d_{ij}]$ όπου $d_{ij} = a_{ji}^*$.

Ορίζεται μοναδική νόρμα στην M_n που την κάνει C* άλγεβρα, ταυτίζοντας $M_n \simeq \mathcal{B}(\ell^2([n]))$:

$$\left\|[a_{ij}]\right\| = \sup\{\left\|[a_{ij}]x\right\|_2 : x \in \ell^2([n]), \|x\|_2 \leq 1\}$$
$$= \sup\{\left| \left\langle [a_{ij}]x, y \right\rangle_2 \right| : x, y \in \operatorname{ball}(\ell^2([n]))\}$$
$$\left\|[a_{ij}]\right\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

Πίνακες σε μια C* άλγεβρα

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια C* άλγεβρα με μονάδα και $n \in \mathbb{N}$, ο χώρος $M_n(\mathcal{A})$ των $n \times n$ πινάκων $[a_{ij}]$ με στοιχεία $a_{ij} \in \mathcal{A}$ γίνεται *-άλγεβρα με τις προφανείς πράξεις: γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη, γινόμενο $[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}]$ όπου $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \in \mathcal{A}$ και ενέλιξη $[a_{ij}]^* = [d_{ij}]$ όπου $d_{ij} = a_{ji}^* \in \mathcal{A}$.

Πώς όμως να ορίσω νόρμα στην $M_n(\mathcal{A})$, ώστε να γίνει C* άλγεβρα?

Παράδειγμα

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, $\mathcal{A} \simeq C_0(X)$ οπότε

$$M_n(\mathcal{A}) \simeq M_n(C_0(X)) \simeq \{F = [f_{ij}] : X \to M_n : \ \forall f_{ij} \in C_0(X)\}$$

είναι C* άλγεβρα με $\|F\| = \sup\{\|F(t)\|_{M_n} : t \in X\}$.

Αλλιώς;

Πίνακες τελεστών

Εμφυτεύοντας την $\mathcal{A}$ ως C* άλγεβρα (δηλ. *-ισομορφικά και ισομετρικά) στην C* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε κατάλληλο χώρο Hilbert H (μέσω της καθολικής ή όποιας άλλης πιστής αναπαράστασης), βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι η *-άλγεβρα $M_n(\mathcal{B}(H))$ δέχεται νόρμα ως προς την οποία είναι C* άλγεβρα.

Πίνακες τελεστών

Έστω H χώρος Hilbert, $n \in \mathbb{N}$ και $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$. Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζουμε $A : H^n \to H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι $A \in \mathcal{B}(H^n)$.

Συμβολισμός: $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} := \xi \otimes e_i$ οπότε $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes e_i.$

Πίνακες τελεστών

Αντίστροφα, αν δοθεί $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ως εξής:
Θεωρούμε την απεικόνιση $V_j : H \to H^n : \xi \mapsto \xi \otimes e_j$ και θέτουμε $a_{ij} = V_i^* A V_j \in \mathcal{B}(H)$.

Η απεικόνιση $\Phi : M_n(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \to A$ που ορίσαμε είναι ισομορφισμός *-αλγεβρών. Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα από την C* άλγεβρα $\mathcal{B}(H^n)$ στην $M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζοντας

$$\left\| [a_{ij}] \right\| := \left\| \Phi([a_{ij}]) \right\|_{\mathcal{B}(H^n)},$$

η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C* άλγεβρα.

(Δες και το αρχείο mat.pdf.)

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Αν $n \in \mathbb{N}$, κάθε $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζει $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ με $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \qquad (\xi_i \in H)$$

Η απεικόνιση $A \to [a_{ij}] : \mathcal{B}(H^n) \to M_n(\mathcal{B}(H))$ είναι *-ισομορφισμός. Συνεπώς η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C*-άλγεβρα με τη νόρμα της $\mathcal{B}(H^n)$. Έτσι, αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα τελεστών, η $M_n(\mathcal{A})$ γίνεται άλγεβρα τελεστών.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Έστω $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή απλώς χώρων) τελεστών. Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) \;\text{ όπου }\; \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C*-άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.
Αν η Φ είναι *-μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Υπενθύμιση

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών είναι θετική ανν
$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; \Phi(a) \geq 0.$$

ΔΕΝ έπεται πάντα ότι η Φ_n είναι θετική. Παράδειγμα Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathcal{A} = M_2$: προφανώς θετική. Όμως

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ θετικός, αλλά } \Phi_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ όχι θετικός.}$$

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών λέγεται πλήρως θετική αν η Φ_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα διαστολής του Stinespring

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων:
Κάθε *-μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \ \forall a$).
Άρα κάθε *-μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί π_n *-μορφισμός).
Κάθε απεικόνιση $a \to V^*aV$ είναι πλήρως θετική
(εδώ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $V \in \mathcal{B}(H)$). Σύνθεση:
Επομένως κάθε $a \to V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.
Δεν υπάρχουν άλλες:

Θεώρημα (Stinespring)

*Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

Η *-αναπάρασταση π λέγεται διαστολή της Φ μέσω της «εμφύτευσης» $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$.
[Υπάρχει και μια συνθήκη ελαχιστότητας.]

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *από μια* C*-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα στον* $\mathcal{B}(H)$ *υπάρχει* (π, H_ϕ, V) *όπου* π *είναι* *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ *στον χώρο Hilbert* H_ϕ *και* $V : H \to H_\phi$ *είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

Σύγκριση με απόδειξη GNS: (110)

(Πλήρης απόδειξη στο stineproof.pdf.)

Βήματα απόδειξης Stinespring

1. Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον
$$\begin{aligned}\mathcal{A}\otimes c_{00}(\mathbb{N}) = c_{00}(\mathbb{N},\mathcal{A}) &= \{\vec{a}:\mathbb{N}\to\mathcal{A} : \operatorname{supp}\vec{a}\ \text{πεπερ.}\}\\ &= \operatorname{span}\{a\otimes e_n : a\in\mathcal{A}, n\in\mathbb{N}\} := \widetilde{\mathcal{A}}\end{aligned}$$
Όταν $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{A}$.

2. Αν $\{\xi_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H ορίζουμε $\langle a\otimes e_n, b\otimes e_m\rangle_0 := \langle\Phi(b^*a)\xi_n,\xi_m\rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή
$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle_0 := \sum_{n,m}\langle\Phi(b(m)^*a(n))\xi_n,\xi_m\rangle_H .$$
Όταν $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ έχουμε $\langle a,b\rangle_0=\phi(b^*a)$.

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι
$$\left\langle\sum_{n=1}^N a(n)\otimes e_n, \sum_{m=1}^N a(m)\otimes e_m\right\rangle_0 \geq 0.$$
Από Cauchy-Schwarz το σύνολο $\mathcal{N}_\phi=\mathcal{N} := \{\vec{u}\in\widetilde{\mathcal{A}} : \langle\vec{u},\vec{u}\rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes e_j) := ab \otimes e_j \quad (a, b \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N})$$

$$\text{ισοδύναμα } (\pi_0(a)\vec{b})(j) := a \cdot \vec{b}(j) \quad (a \in \mathcal{A}, \vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}, j \in \mathbb{N}).$$

(Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $[\pi_0(a)(b) = ab]$).

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes e_j] = [ab \otimes e_j].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7 Δείχνουμε ότι $\left\|\pi_1(a)([\vec{b}])\right\|_\phi \leq \|a\| \left\|[\vec{b}]\right\|_\phi$.
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.
Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.

8 Αν $H_0 = \mathrm{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορίζουμε

$$V : H_0 \to H_{0\phi} \to H_\phi : \xi_n \to \mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes e_n \to [\mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes e_n]$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Η V είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V : H \to H_\phi$.
Τέλος, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle (V^*\pi(a)V)\xi_n, \xi_m \rangle_H &= \langle \pi(a)V\xi_n, V\xi_m \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a)[\mathbf{1} \otimes e_n], [1 \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} = \left\langle \Phi(\mathbf{1}^* a)\xi_n, \xi_m \right\rangle_H . \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$V^*\pi(a)V = \Phi(a) . \qquad \square$$

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

(Περισσότερα και αποδείξεις στο tanginom3.pdf.)

Έστω E, F γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$.

Ορισμός

Τανυστικό γινόμενο των E και F ονομάζεται ένα ζεύγος (M, ϕ), όπου M ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\phi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιούν τα εξής:

1. $M = \operatorname{span}\{\phi(x, y) : x \in E, y \in F\}$
2. Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\phi(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεώρημα (Ύπαρξη)

Αν E και F δύο γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$, τότε ύπαρχει (τουλάχιστον) ένα τανυστικό γινόμενο των E και F.

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

Θεώρημα (Καθολική Ιδιότητα)

Έστω E, F *δύο* $\mathbb{K}$*-γραμμικοί χώροι και* (M, ϕ) *ένα τανυστικό τους γινόμενο. Για κάθε* $\mathbb{K}$*-γραμμικό χώρο* G *και κάθε διγραμμική απεικόνιση* $b : E \times F \to G$*, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $B : M \to G$ *τέτοια ώστε* $B(\phi(x, y)) = b(x, y)$ *για κάθε* $(x, y) \in E \times F$*.*

Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Αν (M_1, ϕ_1) *και* (M_1, ϕ_1) *δύο τανυστικά γινόμενα των γραμμικών χώρων* E *και* F *τότε, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός* $\pi : M_1 \to M_2$ *ώστε* $\pi \circ \phi_1 = \phi_2$*.*

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

Στο εξής συμβολίζουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο M δύο γραμμικών χώρων E και F με $E \otimes F$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\phi : E \times F \to E \otimes F$ με

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

Δηλαδή, το τανυστικό γινόμενο των χώρων E και F, είναι ένας γραμμικός χώρος $E \otimes F$ της μορφής

$$E \otimes F = \operatorname{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

και κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ σε αυτόν τον χώρο έχει μια αναπαράσταση (όχι μοναδική) της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in E$ και $y_i \in F$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Κάθε στοιχείο της μορφής $x \otimes y$ ονομάζεται *στοιχειώδης τανυστής* (elementary tensor) ή *απλός τανυστής* (simple tensor).

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

Πρόταση

Κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ *μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα* $u = \sum_i e_i \otimes f_i$ *ώστε τα* $\{f_i\} \subseteq F$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε τα* $\{e_i\} \subseteq E$ *καθορίζονται μοναδικά απο τα* f_i.

Τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert [Α. Χατζηνικολάου]

Ορισμός

Έστω H, K χώροι Hilbert. Στον χώρο $H \otimes K$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \right\rangle_{hs} := \sum_{i,j} \left\langle x_i, y_j \right\rangle_H \left\langle z_i, w_j \right\rangle_K .$$

Δηλαδή, αν $h_i \otimes k_i \in H \otimes K$, $i = 1, 2$ έχουμε

$$\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 \rangle_{hs} = \langle h_1, h_2 \rangle_H \langle k_1, k_2 \rangle_K .$$

Πρόταση

Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs} : H \otimes K \times H \otimes K \to \mathbb{C}$ είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $H \otimes K$.

Ορισμός

Ονομάζουμε $H \otimes_{hs} K$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\cdot\|_{hs} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}^{\frac{1}{2}}$ η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στην προηγούμενη πρόταση.

Πρόταση

Έστω H, K *δύο χώροι Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H), S \in \mathcal{B}(K)$ *φραγμένοι τελεστές. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $T \otimes S : H \otimes K \to H \otimes K : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ *η οποία επεκτείνεται σε μοναδικό φραγμένο τελεστή*

$$T \otimes_{sp} S : H \otimes_{hs} K \to H \otimes_{hs} K$$

με νόρμα $\left\|T \otimes_{sp} S\right\| = \|T\| \, \|S\|$.

Πρόταση *Αν H και K χώροι Hilbert, τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K) \to \mathcal{B}(H \otimes_{hs} K)$$
$$T \otimes S \mapsto T \otimes_{sp} S$$

είναι 1-1 μορφισμός $*$-αλγεβρών. Επομένως, από την εμφύτευση του χώρου αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K)$ στην C-άλγεβρα των φραγμένων τελεστών στον χώρο Hilbert $H \otimes_{hs} K$, μπορούμε να ορίσουμε την νόρμα $\|\cdot\|_{sp}$ στον $\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K)$ θέτοντας*

$$\left\| \sum_i T_i \otimes S_i \right\|_{sp} := \left\| \sum_i T_i \otimes_{sp} S_i \right\|.$$

Ορίζουμε λοιπόν το spatial ή minimal *τανυστικό γινόμενο*

$$\mathcal{B}(H) \otimes_{sp} \mathcal{B}(K) := \overline{\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K)}^{\|\cdot\|_{sp}}$$

και μάλιστα η $\|\cdot\|_{sp}$ είναι μια C-cross-norm, δηλαδή είναι μια C*-νόρμα με την επιπλέον ιδιότητα $\|T \otimes_{sp} S\| = \|T\| \, \|S\|$ (cross-norm property).*

Νόρμες σε τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert και δυισμοί

Δείτε το newten.pdf.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις και τανυστικά γινόμενα

Υπενθύμιση E γραμμικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$:

$$E \otimes \mathbb{C}^n \simeq E^n : x \otimes [\lambda_i]_{i=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_n x \end{bmatrix} \quad : x \otimes e_i \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \mathbb{M}^n \simeq M_n(E) = : x \otimes [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x & \dots & a_{1n}x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x & \dots & a_{2n}x \end{bmatrix}$$

$$: x \otimes E_{ij} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Πλήρως θετικές, πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Υπενθύμιση $\Phi : E \to F$ γραμμική

$$\rightsquigarrow \Phi_n : M_n(E) \to M_n(F) : [x_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto [\Phi(x_{ij})]_{i,j=1}^n$$
$$: x \otimes E_{ij} \mapsto \Phi(x) \otimes E_{ij}$$

Δηλαδή $\Phi : E \to F$ γραμμική
$\rightsquigarrow$ $\Phi_n := \Phi \otimes \mathrm{id}_{M_n}$ $: E \otimes M_n \to F \otimes M_n$.

Αν A, B είναι C*-άλγεβρες (ή γενικότερα operator systems) μια $\Phi : A \to B$ γραμμική λέγεται completely positive (CP) αν για κάθε n η $\Phi_n : A \otimes M_n \to B \otimes M_n$ είναι θετική και λέγεται completely bounded (CB) αν $\sup_n \|\Phi_n : M_n(A) \to M_n(B)\| := \|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ σε χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathcal{A}.$$

Ακολουθούν τα βήματα της απόδειξης με χρήση τανυστικών γινομένων.

Βήματα απόδειξης Stinespring

1. Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον $\mathcal{A} \otimes H = \operatorname{span}\{a \otimes \xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in H\}$
   Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.
2. Ορίζουμε $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_0 := \langle \Phi(b^* a)\xi, \eta \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή
   $$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} b_m \otimes \eta_m \right\rangle_0 := \left\langle \Phi_N(B^* A)\vec{\xi}, \vec{\eta} \right\rangle_{H^N}.$$
   όπου $B^* A = [b_1^*, \dots, b_N^*]^\dagger [a_1, \dots, a_N] \in M_N(\mathcal{A})$,
   $\vec{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_N]^\dagger \in H^N$.
   Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \phi(b^* a)$.
3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι
   $$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} a_m \otimes \xi_m \right\rangle_0 \geq 0.$$
   Από Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$
$$\text{ισοδύναμα } \pi_0(a) := L_a \otimes \mathrm{id_H} \quad (a \in \mathcal{A}).$$

(όπου $L_a : A \to A : b \mapsto ab$).
(Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $[\pi_0(a)(b) = ab]$).

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] = [ab \otimes \xi].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7. Δείχνουμε ότι $\left\|\pi_1(a)([\vec{b}])\right\|_\phi \leq \|a\| \left\|[\vec{b}]\right\|_\phi$.
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.
   Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.
8. Ορίζουμε

$$V : H \to H_{0\phi} \to \mathcal{A} \otimes H : \xi \to \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \xi \to [\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \xi]$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Η V είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V : H \to H_\phi$.
Τέλος, για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle (V^* \pi(a) V)\xi, \eta \rangle_H &= \langle \pi(a) V\xi, V\eta \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a)[\mathbf{1} \otimes \xi], [1 \otimes \eta] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta] \rangle_{H_\phi} = \left\langle \Phi(\mathbf{1}^* a)\xi, \eta \right\rangle_H . \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a) . \qquad \square$$

Choi - Kraus Decomposition

Εξειδίκευση της αναπαράστασης Stinespring στην περίπτωση $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ και $H = \mathbb{C}^d$:

Θεώρημα (Choi, 1975)

Έστω $\Phi : M_n \to M_d$ γραμμική απεικόνιση.
Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. *Η Φ είναι πλήρως θετική.*
2. *Η Φ είναι n-θετική.*
3. *Ο $P_\Phi = [\Phi(E_{i,j})]_{i,j=1}^n \in M_n(M_d)$ είναι θετικός.*
4. *Υπάρχουν $V_1, \dots, V_K \in M_{d,n}$ ώστε $\Phi(X) = \sum_{k=1}^{K} V_k^* X V_k$ για κάθε $X \in M_n$.*

Περισσότερα στις σημειώσεις του V.I. Paulsen
Entanglement And Non-Locality, Section 4
και Operator Algebra Methods in QIT, Section 7.

Choi - Kraus Decomposition

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ *και* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *όπου* $H = \mathbb{C}^d$ *μία n-θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν* $V_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^n$ *(όχι μοναδικά) ώστε*

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{K} V_j^* A V_j \quad \forall A \in \mathcal{A}\,.$$

Η παράσταση αυτή λέγεται διάσπαση Kraus της Φ *και το ελάχιστο πλήθος των* V_j *ονομάζεται τάξη Kraus ή τάξη Choi της* Φ.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Ονομάζουμε $E_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$ τον πίνακα με 1 στην θέση (r,s) και 0 αλλού. Δηλαδή

$$E_{rs}(x) = \langle x, e_s \rangle e_r := e_r e_s^*(x) \ \ (x \in \mathbb{C}^n).$$

Η $\{E_{rs} : 1 \leq r, s \leq n\}$ είναι βάση του γραμμ. χώρου $\mathcal{A} = M_n$.

Παρατήρηση Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^d$, έστω V^* ο $d \times n$ πίνακας που έχει στήλες τα $x_1, x_2, \dots, x_n$, οπότε

$$V^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d : e_r \to x_r, \ r = 1, \dots, n.$$

Τότε $V^* E_{rs} V = x_r x_s^*$:

$$\begin{array}{lccccccc} V^* E_{rs} V : & \mathbb{C}^d & \to & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^d \\ & y & \to & Vy & \to & \langle Vy, e_s \rangle e_r & \to & \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r \end{array}$$

Δηλαδή $(V^* E_{rs} V)(y) = \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r = \langle y, V^* e_s \rangle V^* e_r = \langle y, x_s \rangle x_r = (x_r x_s^*)(y)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Αν ονομάσουμε v το διάνυσμα στήλη $v = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^\dagger \in \mathbb{C}^{nd}$, τότε ο τελεστής $vv^* : \mathbb{C}^{nd} \to \mathbb{C}^{nd}$ που ανήκει στον $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{nd}) = M_{nd} = M_n(M_d)$ έχει πίνακα $vv^* = [x_r x_s^*]_{r,s}$. Δηλαδή $[V^* E_{rs} V]_{r,s} = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Απόδειξη της διάσπασης Kraus. Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να το δείξουμε για $A = E_{rs}$, $1 \leq r, s \leq n$.

Παρατηρώ ότι ο $Q := [E_{rs}] = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην $M_n(\mathcal{A}) = M_n(M_n)$. Επομένως αφού η Φ είναι n-θετική, ο $P_\Phi := [\Phi(E_{rs})] = \begin{bmatrix} \Phi(E_{11}) & \dots & \Phi(E_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(E_{n1}) & \dots & \Phi(E_{nn}) \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην $M_n(\mathcal{B}(H)) = M_n(M_d)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Ο $P_\Phi := [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικός στην $M_n(M_d) = M_{nd} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^{nd})$. Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ο.κ. βάση $\{f_j : j = 1, \dots, nd\}$ του $\mathbb{C}^{nd}$ από ιδιοδιανύσματα του P_Φ με ιδιοτιμές $\lambda_j \geq 0$. Δηλαδή

$$P_\Phi = \sum_{j=1}^{nd} \lambda_j f_j f_j^* = \sum_{j=1}^{K} v_j v_j^* \quad \text{όπου} \quad v_j = \sqrt{\lambda_j} f_j \neq 0,\ K = \mathrm{rank}(P_\phi).$$

Από την Παρατήρηση, γράφοντας κάθε $v_j \in \mathbb{C}^{nd}$ ως διάνυσμα στήλη $v_j = [x_1^j\ x_2^j\ \cdots\ x_n^j]^\dagger$ με $x_r^j \in \mathbb{C}^d$, έχουμε

$$v_j v_j^* = [x_r^j x_s^{j*}] = [V_j^* E_{rs} V_j]$$

και συνεπώς

$$[\Phi(E_{rs})] = P_\Phi = \sum_{j=1}^{K} [V_j^* E_{rs} V_j] \quad \text{άρα}$$

$$\Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{K} V_j^* E_{rs} V_j \quad 1 \leq r, s \leq n$$

όπως θέλαμε. $\square$

Τάξη Choi-Kraus μιας απεικόνισης CP

Παρατήρηση Ο πίνακας $Q = [E_{rs}]_{r,s} \in M_n(M_n)$ αντιστοιχεί στο στοιχείο $\sum_{r,s=1}^{n} E_{rs} \otimes E_{rs}$ του $M_n \otimes M_n$ ή ισοδύναμα στον τελεστή πρώτης τάξης $ee^* \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ όπου $e := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$ (ονομάζεται maximally entangled vector).

Ορισμός (Choi Rank)

Έστω $\Phi : M_n \to M_d$ πλήρως θετική. Η τάξη Choi της Φ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{cr}(\Phi) = \min\{K \in \mathbb{N} : \Phi(X) = \sum_{k=1}^{K} V_k^* X V_k \ \forall X\}.$$

Πρόταση

Αν $\Phi : M_n \to M_d$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση, η τάξη Choi της Φ είναι η τάξη του πίνακα P_Φ:

$$\mathrm{cr}(\Phi) = \mathrm{rank}(P_\Phi)\,.$$