C* - Άλγεβρες χωρίς μονάδα

1 Η Μοναδοποίηση

Θα δείξουμε ότι κάθε C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα εμφυτεύεται ισομετρικά ως μεγιστικό ιδεώδες σε μια C^* άλγεβρα με μονάδα. [1]

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα χωρίς μονάδα. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}^\sim := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$$
$$(a,z)(b,w) := (ab + wa + zb, zw)$$
$$(a,z)^* =: (a^*, \bar{z})$$
$$\|(a,z)\| := \sup\{\|ab + zb\| : b \in \text{ball}(\mathcal{A})\} .$$

Δηλαδή η νόρμα στην $\mathcal{A}^\sim$ ορίζεται ταυτίζοντας κάθε $(a,z) \in \mathcal{A}^\sim$ με τον τελεστή $L_a + zI : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : b \to ab + zb$ στον χώρο Banach $\mathcal{A}$, όπου $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : b \to ab$.

Παρατήρηση Η νόρμα $\|\cdot\|_1$ όπου $\|(x,\lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda| \quad (x \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$ στην $\mathcal{A}^\sim$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα C^*. Αν παραδείγματος χάριν $x = x^* \in \mathcal{A}$ τότε $\|(x,i)^*(x,i)\|_1 = \|x\|^2 + 1$ ενώ $\|(x,i)\|_1^2 = (\|x\| + 1)^2$.

Πρόταση 1. *Η $\mathcal{A}^\sim$ με τις πράξεις και τη νόρμα που ορίσαμε είναι C^*-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ η απεικόνιση $L_a + zI : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : b \to ab + zb$ είναι βεβαίως γραμμική, και είναι φραγμένη αφού $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ για κάθε $b \in \mathcal{A}$ δηλαδή $\|L_a\| \leqslant \|a\|$. Η απεικόνιση $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$ είναι συνεχής μορφισμός αλγεβρών. Επιπλέον, επειδή η $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρα, η L είναι ισομετρική: πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \|xx^*\| = \|L_x(x^*)\| \leqslant \|L_x\|.\|x^*\| = \|L_x\|.\|x\| \leqslant \|x\|.\|x\| \\ \text{άρα} \qquad \|L_x\| = \|x\| . \end{aligned} \tag{1}$$

Έπεται ότι η εικόνα της $L(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης, άρα κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Επίσης, η $L(\mathcal{A})$ δεν περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή $I \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ (εξηγείστε γιατί). Συνεπώς $\text{dist}(I, L(\mathcal{A})) := \delta > 0$. Έπεται ότι, αν $\lambda \neq 0$,

$$\|L_a + \lambda I\| = |\lambda| \, \|L_b + I\| \geqslant |\lambda|\delta > 0 \quad \text{όπου } b = \frac{a}{\lambda} .$$

Έπεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{A}^\sim \to \mathcal{B}(\mathcal{A}) : (x,\lambda) \mapsto L_a + \lambda I$$

είναι 1-1, και βεβαίως είναι μορφισμός αλγεβρών.

Δηλαδή η $\mathcal{A}^\sim$ εφοδιασμένη με τη νόρμα $\|(a,z)\| := \sup\{\|ab + zb\| : b \in \text{ball}(\mathcal{A})\}$ που ορίσαμε είναι ισομετρικά ισόμορφη με τον κλειστό (αφού $\text{dist}(I, L(\mathcal{A})) > 0$) υπόχωρο $L(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$ του χώρου Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, άρα είναι άλγεβρα Banach με μονάδα.

[1] *Ενημερωτικά:* Η μοναδοποίηση που ορίζουμε εδώ είναι η μικρότερη, με την ακόλουθη έννοια: Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}$ με μονάδα που περιέχει την $\mathcal{A}$ (δηλ. μια ισομορφική εικόνα της $\mathcal{A}$) ως ιδεώδες που τέμνει κάθε άλλο (essential ideal) περιέχει και την $\mathcal{A}^\sim$ (δηλ. μια ισομορφική εικόνα της $\mathcal{A}^\sim$).

Το μόνο που μένει να ελεγχθεί είναι η ιδιότητα C^*:

Έστω $a = (x, \lambda) \in \mathcal{A}^\sim$. Για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \leqslant 1$ θεωρούμε το στοιχείο

$$\begin{aligned}(y,0)^*(x,\lambda)^*(x,\lambda)(y,0) &= ((x,\lambda)(y,0))^*((x,\lambda)(y,0)) \\ &= ((xy+\lambda y)^*(xy+\lambda y), 0) = (z^*z, 0) \in \mathcal{A}^\sim\end{aligned}$$

όπου το $z = xy + \lambda y$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (που ικανοποιεί την ιδιότητα C^*), άρα $\|z\|^2 = \|z^*z\|$. Αλλά $\|z^*z\| = \|L_{z^*z}\| = \|(z^*z, 0)\|$ (από την (**??**)). Έχω λοιπόν

$$\begin{aligned}\|xy+\lambda y\|^2 &= \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|(z^*z,0)\| = \|(y,0)^*(x,\lambda)^*(x,\lambda)(y,0)\| \\ &\leqslant \|(y,0)\|\|a^*a\|\|(y,0)\| \leqslant \|a^*a\|\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|a\|^2 = \sup\{\|xy+\lambda y\|^2 : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \|a^*a\|\,.$$

Η ανισότητα αυτή αρκεί για την ισότητα. Πράγματι, έχουμε

$$\|a\|^2 \leqslant \|a^*a\| \leqslant \|a^*\|\,\|a\|$$

άρα $\|a\| \leqslant \|a^*\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, άρα και για το a^*, δηλαδή $\|a^*\| \leqslant \|a^{**}\| = \|a\|$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\|a\|^2 \leqslant \|a^*a\| \leqslant \|a^*\|\,\|a\| \leqslant \|a\|^2$$

δηλαδή ισχύει ισότητα. □

2 Μεταθετικές C^*-άλγεβρες χωρίς μονάδα

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποίηση της, $\mathcal{A}^\sim$, με την νόρμα που ορίσθηκε στην **??**, είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα, επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand $a \longrightarrow \hat{a}$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}^\sim$ επί της $C(K_1)$, όπου K_1 το σύνολο $\Omega(\mathcal{A}^\sim)$ των χαρακτήρων της $\mathcal{A}^\sim$ με την ασθενή-* τοπολογία.

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά *-ισομορφη με την $C_0(\Omega(\mathcal{A}))$.

Η απεικόνιση

$$\phi_\infty : \mathcal{A}^\sim \to \mathbb{C} : (x,\lambda) \mapsto \lambda$$

είναι χαρακτήρας της $\mathcal{A}^\sim$ που μηδενίζει την $\mathcal{A}$. Κάθε άλλος χαρακτήρας της $\mathcal{A}^\sim$, περιοριζόμενος στην $\mathcal{A}$, ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{A}$. Αντίστροφα κάθε χαρακτήρας ϕ της $\mathcal{A}$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν χαρακτήρα $\tilde{\phi}$ της $\mathcal{A}^\sim$ θέτοντας $\tilde{\phi}(x,\lambda) := \phi(x) + \lambda$. Δηλαδή αν ονομάσουμε $K_o \subseteq K_1$ το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}^\sim$ που δεν μηδενίζουν την $\mathcal{A}$, έχουμε $K_1 = K_o \cup \{\phi_\infty\}$ και $K_o = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

Ισχυρισμός *Αν K είναι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$, τότε ο K είναι ομοιομορφικός με τον K_o.*

Πράγματι, αν $\phi_i, \phi \in K$ τότε

$$\begin{aligned}\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi &\iff \phi_i(x) \longrightarrow \phi(x) \ \text{ για κάθε } \ x \in \mathcal{A} \\ &\iff \tilde{\phi}_i(x,\lambda) \longrightarrow \tilde{\phi}(x,\lambda) \ \text{ για κάθε } \ (x,\lambda) \in \mathcal{A}^\sim \\ &\iff \tilde{\phi}_i \xrightarrow{w^*} \tilde{\phi}\,.\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση $\phi \to \tilde{\phi} : K \to K_o$ είναι ομοιομορφισμός. Έπεται ότι ο K είναι, όπως και ο K_o, τοπικά συμπαγής χ'ωρος Hausdorff Έπεται επίσης ότι η απεικόνιση

$$\Psi : C_0(K_o) \to C_0(K) : \Psi(f)(\phi) := f(\tilde{\phi})$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός.

Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{A}$ και $\phi \in K$ ισχύει $\tilde{\phi}(x,0) = \phi(x)$. Επομένως, αν ταυτίσουμε τους χώρους K και K_o (μέσω της απεικόνισης $\phi \to \tilde{\phi}$), ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G} : x \to \hat{x}$ του x (ως προς την $\mathcal{A}$) δεν είναι παρά ο περιορισμός του μετασχηματισμού Gelfand $\tilde{\mathcal{G}} : (x,0) \to \widehat{(x,0)}$ (ως προς την $\mathcal{A}^{\sim}$) στον K_o, δηλαδή

$$\widehat{(x,0)}(\tilde{\phi}) = \hat{x}(\phi), \quad \phi \in K.$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\widehat{(x,0)}$ με $x \in \mathcal{A}$ είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις $f \in C(K_1)$ με την ιδιότητα $f(\phi_\infty) = 0$. Πράγματι κάθε $f \in C(K_1)$ είναι της μορφής $f = \hat{a}$ για ένα (μοναδικό) $a \in \mathcal{A}^{\sim}$, και ισχύει $\hat{a}(\phi_\infty) = 0$ αν και μόνον αν $\phi_\infty(a) = 0$, δηλαδή αν και μόνον $a \in \mathcal{A}$.

Επομένως η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρική και *-ισομορφική με την C^*-άλγεβρα $\{f \in C(K_1) : f(\phi_\infty) = 0\}$.

Αλλά η απεικόνιση $f \to f|_{K_o}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός της $\{f \in C(K_1) : f(\phi_\infty) = 0\}$ επί της $C_o(K_o)$.

Πράγματι: αν μία $f \in C(K_1)$ μηδενίζεται στο σημείο ϕ_∞ τότε (αφού είναι συνεχής στο ϕ_∞) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq K_1$ του ϕ_∞ ώστε $|f(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \in U$. Θέτοντας $\Omega = U^c$, που είναι συμπαγές υποσύνολο του K_o, βλέπουμε ότι $f|_{K_o} \in C_o(K_o)$ (και φυσικά $\|f\|_\infty = \|f|_{K_o}\|_\infty$).

Αντίστροφα, κάθε $g \in C_o(K_o)$ επεκτείνεται στο K_1 θέτοντας $g(\phi_\infty) = 0$, και η επέκταση είναι συνεχής στο ϕ_∞, γιατί για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \subseteq K_o$ συμπαγές ώστε $|g(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \notin K_\varepsilon$ (αφού $g \in C_o(K_o)$), δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = (K_\varepsilon)^c$ του ϕ_∞ όπου $|g(\psi)| < \varepsilon$.

Τελικώς, η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C_0(K) = C_0(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$ μέσω των ισομορφισμών

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}} \{f \in C(K_1) : f(\phi_\infty) = 0\} \xrightarrow{f \to f|_{K_o}} C_0(K_o) \xrightarrow{\Psi} C_0(K)$$

και παρατηρούμε ότι αυτή η σύνθεση δεν είναι παρά ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G}(x)(\phi) = \phi(x)$ της $\mathcal{A}$.

Πράγματι, έστω $x \in \mathcal{A}$. Γράφοντας $f_x := \widehat{(x,0)}$, έχουμε $f_x(\psi) = \psi((x,0))$ για κάθε $\psi \in K_1$. Στη συνέχεια περιορίζουμε την f_x στο K_0 οπότε έχουμε $f_x(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}((x,0)) = \phi(x)$ και τέλος απεικονίζουμε την περιορισμένη $f_x|_{K_0}$ στην $\Psi(f_x)$ που ορίζεται στο K από τη σχέση $\Psi(f_x)(\phi) := f_x(\tilde{\phi}) = \phi(x) = \hat{x}(\phi)$ για κάθε $\phi \in K$. δηλαδή

$$\mathcal{G} : x \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(x) = f_x \longrightarrow f_x|_{K_0} \longrightarrow \Psi(f_x|_{K_0} = \hat{x}\,.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε το

Θεώρημα 2. *Αν $\mathcal{A}$ μεταθετική C^*-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $C_o(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$. Η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\Omega(\mathcal{A})$ είναι w^*-συμπαγής.*

Απόδειξη Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε, όπως δείξαμε παραπάνω, είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C_o(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$. Επεται ότι ο $\Omega(\mathcal{A})$ δεν είναι w^*-συμπαγής γιατί αν ήταν, η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ θα ανήκε στην $C_o(\Omega(\mathcal{A}), w^*)$, άρα η $\mathcal{A}$ θα είχε μονάδα. Αν πάλι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε ο $\Omega(\mathcal{A})$ είναι συμπαγής, άρα $C_o(\Omega(\mathcal{A})) = C(\Omega(\mathcal{A}))$ και το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα Gelfand - Naimark I. $\square$