ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)
Μ' ΕΝΑ ΣΜΠΑΡΟ, ΔΥΟ ΤΡΥΓΟΝΙΑ[1]

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, ορίζουμε το *ίχνος (trace)* του T:

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$$

όπου $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του H.

Άσκηση IV.1. *Δείξτε ότι το* $\mathrm{tr}(T)$ *δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση και ότι* $\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST)$ *αν* $S, T \in \mathcal{B}(H)$ *και ένας (τουλάχιστον) από τους δύο έχει πεπερασμένη τάξη.*

Αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$ και ο T είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_n = 1, \dots, K\}$ του χώρου $(\ker T)^\perp$ και την επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση του H (οπότε $Te_n = 0$ για κάθε $n > K$).
Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

Αν $\{f_i\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου* H*, τότε*

$$\sum_n \langle STe_n, e_n \rangle = \sum_i \langle TSf_i, f_i \rangle . \qquad (*)$$

Ειδικότερα, η σειρά δεξιά συγκλίνει.

Απόδειξη. Για κάθε n γράφουμε το $S^*e_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle S^*e_n, f_i \rangle f_i$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{f_i\}$, οπότε έχουμε

$$\langle STe_n, e_n \rangle = \langle Te_n, S^*e_n \rangle = \langle Te_n, \sum_i \langle S^*e_n, f_i \rangle f_i \rangle = \sum_i \langle Te_n, f_i \rangle \langle f_i, S^*e_n \rangle$$

$$\text{άρα} \quad \sum_n \langle STe_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{K} \sum_i \langle Te_n, f_i \rangle \langle Sf_i, e_n \rangle = \sum_i \left(\sum_n \langle Te_n, f_i \rangle \langle Sf_i, e_n \rangle \right)$$

πράγμα που δείχνει ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{K} \langle Te_n, f_i \rangle \langle Sf_i, e_n \rangle \right)$ συγκλίνει.

Επίσης, για κάθε i γράφουμε $Sf_i = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Sf_i, e_n \rangle e_n$, οπότε $TSf_i = \sum_{n=1}^{K} \langle Sf_i, e_n \rangle Te_n + 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\langle TSf_i, f_i \rangle = \langle \sum_n \langle Sf_i, e_n \rangle Te_n, f_i \rangle = \sum_n \langle Sf_i, e_n \rangle \langle Te_n, f_i \rangle$$

$$\text{άρα, για κάθε } m, \quad \sum_{i=1}^{m} \langle TSf_i, f_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_n \langle Te_n, f_i \rangle \langle Sf_i, e_n \rangle .$$

Είδαμε όμως ότι το όριο $\lim_m$ του δεξιού μέλους της ισότητας υπάρχει, άρα υπάρχει και του αριστερού και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle TSf_i, f_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_n \langle Te_n, f_i \rangle \langle Sf_i, e_n \rangle = \sum_n \langle STe_n, e_n \rangle .$$

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θέτοντας τώρα $S = I$ στην (*) έπεται ότι για κάθε ορθοκανονική βάση $\{f_i\}$ του H έχουμε

$$\sum_i \langle Tf_i, f_i \rangle = \sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$$

πράγμα που δείχνει ότι ο ορισμός του $\mathrm{tr}(T)$ δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση.

Αυτό ισχύει και για τον τελεστή πεπερασμένης τάξης ST:

$$\sum_i \langle STf_i, f_i \rangle = \sum_n \langle STe_n, e_n \rangle \quad \text{και άρα, από την (*),} \quad \sum_i \langle STf_i, f_i \rangle = \sum_i \langle TSf_i, f_i \rangle$$

δηλαδή $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$. Να και το άλλο τρυγόνι!

Πρόταση. *Το ίχνος ενός* $T \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του (συνυπολογίζοντας την πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής).*

[1] Ευχαριστώ για τη βοήθεια. Απλό ήταν τελικά...

Απόδειξη. Ο τελεστής $T|_{(\ker T)^\perp}$ είναι 1-1 τελεστής ορισμένος σε K-διάστατο χώρο Hilbert, επομένως είναι unitarily ισοδύναμος με έναν 1-1 τελεστή S στον $\ell^2(K) := (\mathbb{C}^K, \|\cdot\|_2)$ ο οποίος θα έχει το ίδιο ίχνος με τον T, και τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες πολλαπλότητες.

Θα δείξω ότι

Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \dots, x_K\}$ του $\ell^2(K)$ ως προς την οποία ο πίνακας του S είναι άνω τριγωνικός.

Αυτό αρκεί: γιατί τότε η διαγώνιος $(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ του πίνακα αποτελείται από τις ιδιοτιμές του, επαναλαμβανόμενες ανάλογα με τις πολλαπλότητες τους (γιατί είναι ακριβώς οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(\lambda I - S) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_K)$) και συνεπώς το ίχνος του S είναι $\lambda_1 + \dots \lambda_K$.

Επειδή ο χώρος $\ell^2(K)$ είναι μιγαδικός, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - S)$ έχει ρίζα: υπάρχει $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ώστε $\det(\lambda_1 I - S) = 0$, οπότε υπάρχει $x_1 \in \ell^2(K)$ με $\|x_1\| = 1$ ώστε $(\lambda_1 - S)x_1 = 0$. Ονομάζουμε τώρα P_2 την προβολή στον χώρο $H_2 := [x_1]^\perp$ και θεωρούμε τον τελεστή $S_2 := P_2 S|_{H_2}$. Ως προς τη διάσπαση $\ell^2(K) = [x_1] \oplus H_2$, ο S γίνεται

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

(άρα $\langle Sx_1, x_1\rangle = \lambda_1$). Με το ίδιο επιχείρημα για τον $S_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ υπάρχει $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ και $x_2 \in H_2$ με $\|x_2\| = 1$ (οπότε $\{x_1, x_2\}$ ορθοκανονικά) ώστε $S_2 x_2 = \lambda_2 x_2$. Έχουμε λοιπόν

$$\langle Sx_2, x_2\rangle = \langle Sx_2, P_2 x_2\rangle = \langle P_2 S x_2, x_2\rangle = \langle S_2 x_2, x_2\rangle = \lambda_2.$$ [2]

Ονομάζουμε τώρα P_3 την προβολή στον χώρο $H_3 = [x_1, x_2]^\perp$ και θεωρούμε τον τελεστή $S_3 := P_3 S|_{H_3}$. Ως προς τη διάσπαση $\ell^2(K) = [x_1, x_2] \oplus H_3$, ο S γίνεται

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας έτσι, μετά από K βήματα θα έχουμε κατασκευάσει ορθοκανονικά διανύσματα $\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$ στον $\ell^2(K)$ (άρα, μια ορθοκανονική βάση του) και μιγαδικούς αριθμούς $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$ ώστε ο πίνακας του S ως προς την βάση αυτή να είναι

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

όπως θέλαμε.

[2](Δείξαμε ότι $\langle S_2 x_2, x_2\rangle = \lambda_2$. Δεν ισχύει κατ' ανάγκην ότι το λ_2 είναι ιδιοτιμή του S.)