ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq M_n$ μια αυτοσυζυγής άλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Τότε $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

Βήματα απόδειξης:

(i) Πάντα έχουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$. Εστω λοιπόν $b \in \mathcal{A}''$. Στόχος είναι να δείξουμε ότι

$$\exists a \in \mathcal{A} \text{ ώστε } a = b, \text{ δηλ. } a\xi = b\xi \ \forall \xi \in \ell^2(n).$$

Αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι

$$\exists a \in \mathcal{A} \text{ ώστε } \qquad be_k = ae_k \ \forall k = 1 \ldots, n.$$

(ii) Αν $k = 1 \ldots, n$, θεωρούμε τον υπόχωρο $V_k := \mathcal{A}e_k = \{ae_k : a \in \mathcal{A}\} \subseteq \ell^2(n)$.
Παρατηρούμε ότι ο V_k είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος, δηλ. $\mathcal{A}V_k \subseteq V_k$. Θα δείξουμε ότι

$$be_k \in V_k \,. \tag{*}$$

Ας το δεχτούμε προς στιγμήν.

Αφού $V_k = \{ae_k : a \in \mathcal{A}\}$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $be_k = ae_k$.

Έχουμε τελειώσει;;

(iii) Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C} := \mathcal{A}^{(n)} \subseteq M_{n^2}(\mathbb{C})$ των πινάκων της μορφής $\{a^{(n)} : a \in \mathcal{A}\}$ όπου $a^{(n)} = a \oplus a \oplus \cdots \oplus a$ (n όροι). Η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $M_{n^2}(\mathbb{C})$ και περιέχει τον ταυτοτικό $n^2 \times n^2$ πίνακα.

(iv) Ισχύει ότι $\mathcal{C}' = M_n(\mathcal{A}')$ και $\mathcal{C}'' = \{c^{(n)} : c \in \mathcal{A}''\}$. Επομένως, $b^{(n)} \in \mathcal{C}''$.

(v) Η $M_{n^2}(\mathbb{C})$ δρά στον χώρο $\ell^2(n^2)$. Θεωρούμε τώρα το διάνυσμα $\xi := e_1 \oplus e_2 \oplus \cdots \oplus e_n \in \ell^2(n^2)$ και τον υπόχωρο $W := \mathcal{C}\xi \subseteq \ell^2(n^2)$. Ο υπόχωρος αυτός είναι $\mathcal{C}$-αναλλοίωτος, επομένως αν $p \in M_{n^2}$ είναι η ορθή προβολή στον W τότε έχουμε $p \in \mathcal{C}'$, από το Λήμμα (παρακάτω). Με τον ίδιο συλλογισμό όπως στο Βήμα (ii) συμπεραίνουμε ότι $b^{(n)}p = pb^{(n)}$ και άρα $b^{(n)}\xi \in \mathcal{C}\xi$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $a^{(n)} \in \mathcal{C}$ ώστε $b^{(n)}\xi = a^{(n)}\xi$ και τώρα έχουμε τελειώσει (γιατί;).

Απόδειξη της σχέσης $(*)$. Θα χρειασθεί να αποδείξετε το ακόλουθο

Λήμμα Ένας υπόχωρος V του $\ell^2(n)$ είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος ανν η ορθή προβολή p επί του V ανήκει στον μεταθέτη $\mathcal{A}'$ (εδώ p είναι η γραμμική απεικόνιση $p : \ell^2(n) \to \ell^2(n)$, δηλ. $p \in M_n$, που ορίζεται από τις σχέσεις $pv = v$ για κάθε $v \in V$ και $pw = 0$ για κάθε $w \perp V$).

Έπεται από το Λήμμα ότι αν p_k είναι η προβολή στον V_k τότε $p \in \mathcal{A}'$. Άρα $p_k b = bp_k$. Πάλι από το Λήμμα έπεται ότι ο V_k είναι b-αναλλοίωτος (γιατί;). Επομένως, αφού $e_k \in V_k$ (γιατί;) έχουμε $be_k \in V_k$.

Άσκηση 2. *Δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι μια μεγιστική αβελιανή υπάλγεβρα της M_n είναι όμοια με την άλγεβρα D_n των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων. Παράδειγμα: Θεωρείστε την άλγεβρα $\mathcal{B} \subseteq M_2$ που παράγεται από τον ταυτοτικό πίνακα και τον πίνακα e_{12} (που έχει 1 στην θέση (1,2) και 0 παντού αλλού).*

Άσκηση 3. *Κάθε μεγιστική* αυτοσυζυγής *αβελιανή άλγεβρα τελεστών $\mathcal{D}$ σ' έναν χώρο Hilbert H* με $\dim H = n < \infty$ *είναι unitarily ισοδύναμη με την άλγεβρα D_n των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων. Ισοδύναμα υπάρχει μια* ορθοκανονική *βάση του H που διαγωνοποιεί ταυτόχρονα όλους τους $a \in \mathcal{D}$.*

[*Υπόδειξη:* Επαγωγή στο n. Θα χρειασθεί να δείξετε ότι για κάθε $n > 1$, κάθε άλγεβρα που ικανοποιεί τις υποθέσεις περιέχει μια μη μηδενική ορθή προβολή διαφορετική από τον ταυτοτικό.]