ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ III

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια C* άλγεβρα με μονάδα, ένα $a \in \mathcal{A}$ θα λέγεται (προσωρινά) *positive* αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Δεν είναι προφανές ότι το άθροισμα δυο positive στοιχείων είναι positive!

Θα δείξουμε ότι ένα στοιχείο της $\mathcal{B}(H)$ είναι positive αν και μόνον αν είναι θετικός τελεστής.

**Άσκηση 1.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ένας ισομετρικός *-μορφισμός. Δείξτε ότι ένα $a \in \mathcal{A}$ είναι positive αν και μόνον αν ο $\pi(a)$ είναι θετικός τελεστής.*

**Άσκηση 2.** *Δείξτε ότι (α) το σύνολο $\mathcal{A}_+$ των positive στοιχείων της $\mathcal{A}_+$ είναι κλειστός κώνος και ότι (β) $\mathcal{A}_+ = \{b^*b : b \in \mathcal{A}\}$.*

Κατά συνέπεια τα στοιχεία του κώνου $\mathcal{A}_+$ μπορούν να ονομάζονται θετικά στοιχεία της $\mathcal{A}$.

**Άσκηση 3.** *Δείξτε ότι κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιας C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με ή χωρίς μονάδα) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $a = a_+ - a_-$ όπου τα $a_+, a_-$ είναι θετικά στοιχεία της $\mathcal{A}$ και ικανοποιούν $a_+a_- = 0 = a_-a_+$.*

**Άσκηση 4.** *Δείξτε ότι αν $a, b \in \mathcal{A}_+$ τότε $ab \in \mathcal{A}_+$ αν-ν $ab = ba$.*

**Άσκηση 5.** *Αν $H$ είναι χώρος Hilbert και $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι η *-άλγεβρα $M_n(\mathcal{B}(H))$ είναι *-ισομορφική με την άλγεβρα $\mathcal{B}(H^n)$, και συνεπώς κληρονομεί μια νόρμα ως προς την οποία είναι C*-άλγεβρα. [Δείτε την επόμενη σελίδα για υποδείξεις.]*

# Άσκηση: Η C* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B}(H))$

Έστω $H$ χώρος Hilbert, $n \in \mathbb{N}$ και $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$.[1] Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζουμε $A : H^n \to H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι ο $A$ είναι καλά ορισμένος (απεικονίζει τον $H^n$ στον $H^n$) και ότι $A \in \mathcal{B}(H^n)$. Π.χ. $\|A\|^2_{\mathcal{B}(H^n)} \leqslant \sum_{i,j} \|a_{ij}\|^2_{\mathcal{B}(H)}$ (άσκηση).

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και $\xi \in H$, θεωρούμε το διάνυσμα $[\xi_1, \ldots, \xi_n]^T \in H^n$ όπου $\xi_i = 0$ για $i \neq j$ και $\xi_j = \xi$ (συμβολίζουμε το διάνυσμα αυτό με $\xi \otimes e_j$). Ορίζουμε την απεικόνιση $V_j : H \to H^n$ από την σχέση

$$V_j : \xi \to \xi \otimes e_j, \text{ δηλ. } \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι

$$V_j^* : H^n \to H : \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \to \xi_j \,.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $V_j V_j^* : H^n \to H^n$ είναι η προβολή $P_j$ στην $j$ συντεταγμένη, και ότι η $V_j^* V_j : H \to H$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής (η $V_j$ είναι ισομετρία).

Δείξτε ότι $a_{ij} = V_i^* A V_j$.

Αντίστροφα, αν δοθεί $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ από τη σχέση

$$a_{ij} = V_i^* A V_j \,.$$

Εναλλακτικά, θεωρούμε την απεικόνιση $H \times H \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_i), (\eta \otimes e_j) \rangle_{H^n}, \quad \xi, \eta \in H$$

και παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear μορφή στον $H \times H$, και φράσσεται από την $\|A\|$ γιατί

$$|\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle| \leqslant \|A(\xi \otimes e_i)\|_{H^n} \|\eta \otimes e_j\|_{H^n} \leqslant \|A\|_{\mathcal{B}(H^n)} \|\xi \otimes e_i\|_{H^n} \|\eta \otimes e_j\|_{H^n} = \|A\|_{\mathcal{B}(H^n)} \|\xi\|_H \|\eta\|_H \,.$$

Επομένως από το Θεώρημα BLT υπάρχει μοναδικός τελεστής $b_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle b_{ij}\xi, \eta \rangle_H = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_i), (\eta \otimes e_j) \rangle, \quad \xi, \eta \in H \,.$$

Πρόκειται βεβαίως για τον ίδιο τελεστή: $b_{ij} = a_{ij}$ για κάθε $i, j$ (γιατί;)

Η απεικόνιση

$$\Phi : M_n(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \to A$$

που ορίσαμε είναι ισομορφισμός *-αλγεβρών. Αλλά η $\mathcal{B}(H^n)$, με τη νόρμα τελεστή, είναι C* άλγεβρα. Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα στην $M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζοντας

$$\|[a_{ij}]\| := \left\|\Phi^{-1}([a_{ij}])\right\|_{\mathcal{B}(H^n)} \,,$$

η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C* άλγεβρα.

[1] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle [\xi_1, \ldots, \xi_n]^T, [\eta_1, \ldots, \eta_n]^T \rangle_{H^n} := \sum_j \langle \xi_j, \eta_j \rangle_H$